Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão

Manual
de Matemática

Oficina Souzinha

SECRETARIA DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

GOVERNO DO MARANHÃO
GOVERNO DE TODOS NÓS

GOVERNO DO ESTADO DO MARANHÃO

Flávio Dino

Governador do Estado do Maranhão

Davi Telles

Secretário de Estado da Ciência, Tecnologia e Inovação

Jhonatan Almada

Reitor

Elinaldo Soares Silva

Diretor de Ensino

Dario Manoel Barroso Soares

Diretor de Pesquisa e Extensão

Emanuel Denner Lima de Sena Rosa

Diretor de Planejamento e Administração

EQUIPE DE ELABORAÇÃO:

Valdiane Sales

Nélio Augusto Teixeira Souza

APRESENTAÇÃO

Jovem protagonista,

Ser estudante não é um momento na vida. Ser estudante é uma postura de vida inteira. Aproveitem e valorizem cada momento em nossa escola como oportunidade ímpar de aprendizagem, diálogo, convivência e construção pessoal e coletiva.

A equipe do Instituto Estadual de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão (IEMA) trabalha permanentemente para que vocês tenham o melhor do mundo, em especial as condições e oportunidades para construir seu projeto de vida.

Nesse sentido, oferecemos nas férias as oficinas Souzinha de Matemática, Gonçalves Dias de Língua Portuguesa e Jane Austen de Língua Inglesa que servem como reforço escolar, pois os alunos que não tiveram um desempenho bom nessas disciplinas possam se dedicar nas oficinas para que no próximo semestre não tenham tanta dificuldade.

Contamos com o empenho de vocês para que o IEMA se fortaleça cada vez mais e se torne referência em ensino técnico de tempo integral.

Um cordial abraço,

Jhonatan Almada
Reitor do IEMA

JOAQUIM GOMES DE SOUZA, “O SOUZINHA” – BIOGRAFIA

Matemático, astrônomo, filósofo e parlamentar brasileiro nascido na cidade de Itapecuru Mirim, Província do Maranhão, pioneiro dos estudos matemáticos no Brasil e que apesar da morte precoce, aos 34 anos, deixou uma obra impressionante e é reconhecido como o mais importante matemático da história científica do Brasil. Filho de Inácio José de Souza e Antônia de Brito Gomes de Souza, fez seus estudos secundários em São Luís e em Olinda, Pernambuco.

Aos quatorze anos de idade foi enviado para assentar praça como cadete no 1° Batalhão de Artilharia da Escola Militar, na cidade do Rio de Janeiro (1843). Após aprovação nos exames, decidiu trancar a matrícula na Escola Militar e ingressou (1844) na Faculdade de Medicina do Rio de Janeiro, onde estudou Biologia, Química e Física e se aprofundou em Matemática para melhor compreender aquelas ciências. Após o terceiro ano na Faculdade de Medicina (1847), decidiu voltar à Escola Militar para estudar Matemática. Com apenas dezenove anos de idade, obteve o grau de Doutor em Matemática bem como Doutor em Ciências Físicas e Naturais.

Em seguida foi aprovado como catedrático em concurso de Lente Substituto para a Escola Militar e, também, foi nomeado Capitão Honorário da Escola Militar. Esteve na Europa (1855) e na França apresentou à Académie des Sciences de Paris os seguintes trabalhos: Memória sobre a determinação das funções incógnitas que entram sob o sinal de integral definida, cujo resumo foi apresentado à Royal Society of London (1856) pelo físico G. G. Stokes.

Foi nomeado Lente Catedrático da primeira cadeira, Astronomia (1858), do quarto ano do curso Matemático e de Ciências Físicas e Naturais da Escola Central, sucessora da Escola Militar. Posteriormente, vítima de tuberculose, seu estado de saúde se agravou e, muito doente, viajou novamente para a Europa (1863), em busca de tratamento médico.

Publicou trabalhos sobre Física Matemática, Integração de Equações Diferenciais Parciais, Equações Integrais, dentre outros temas. Sua produção intelectual é constituída essencialmente de trabalhos sobre matemática e sobre literatura. Entre suas obras destacaram-se Resoluções das Equações Numéricas, Recuel de Memoires d’Analise Mathematiques, Dissertação Sobre o Modo de Indicar os Novos Astros sem auxílio de Observações Diretas, e Melanges de Calcul Intégral publicada postumamente, após um longo período de indefinições a respeito de quem financiaria a publicação dessa obra. Enfim o governo brasileiro autorizou, que o representante do Brasil na Alemanha, o Barão de Jauru, se responsabilizasse pelo financiamento da obra junto à editora e o livro foi publicado em Leipzig, por F. A. Brockhaus (1882) com prefácio de Charles Henry, bibliotecário da Universidade de Sorbonne e amigo do brasileiro. Faleceu em Londres na Inglaterra, deixando após sua morte um período vazio na ciência brasileira.

Sumário

1. SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

Você já pensou o que é um sistema de numeração?

Já parou pra pensar por que representamos as quantias e quantidades utilizando os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 ? Quando isso começou? E que povos deram início a isso tudo?

Se você já pensou sobre isso, já sabe que o nosso sistema de numeração é o Sistema de Numeração Decimal e que tem essa denominação porque, além de utilizar 10 algarismos para representar as quantidades, cada algarismo possui um peso que depende da posição que ocupa no numeral. Esse peso é uma potência de 10 e varia do seguinte modo:

$10^0=1$ $10^1=10$ $10^2=100$ $10^3=1000$.... etc

Assim, o número 1354, no sistema decimal representa o número

$$\mathbf{1 \times 10^3+3 \times 10^2 + 5 \times 10 + 4=1354}$$

Os zeros à esquerda em um número são irrelevantes. Dessa forma,

$$\mathbf{0251}= 0 \times 10^3+2 \times 10^2 +5 \times 10 + 1 = 2 \times 10^2+5 \times 10+1=\mathbf{251}$$

Cada algarismo de um número possui uma ordem contada da direita para a esquerda. Assim, no número 1354:

- o 4 ocupa a primeira ordem chamada ordem das unidades
- o 5 ocupa a segunda ordem chamada ordem das dezenas
- o 3 ocupa a terceira ordem chamada ordem das centenas
- o 1 ocupa a quarta ordem chamada ordem das unidades de milhar

Qual a ordem do algarismo 8 no número 7283001? .... e do 7?

1.1 Valor Posicional

Observe que o valor do algarismo depende da posição que ele ocupa no número.

- No número 123, o valor do algarismo 1 é 1 x 100, ou seja, cem unidades porque ele ocupa a posição, ou ordem, das centenas.
- No número 51426, o valor do algarismo 5 é _______________ por que ____ , o valor do algarismo 2 é ____________por que ________________.

No número dado quem vale mais, o 1 ou o 9? Por quê? Escreva o número **12593**. Coloque o algarismo 3 na posição do 5 e o 5 na posição do 3.

- Que número você obteve?
- O novo número é maior ou menor que o anterior?
- O 5 valia quanto no número dado? E no segundo número?
- O 3 valia quanto no número dado?

O quadro abaixo mostra a disposição de números no quadro valor posicional.

números	unidade de Milhão	unidade de Milhão	unidade de Milhão	centena de milhar	dezena de milhar	unidade de milhar	centena	dezena	unidade
15								1	5
35402					3	5	4	0	2
1007948			1	0	0	7	9	4	8

Faça você mesmo.

1) Faça uma tabela e represente as três primeiras classes do sistema decimal, discriminando cada ordem pelo nome. A seguir, escreva nessa tabela todos os números abaixo.

a) 12000045 b) 2370876 c) 25 d) 904506031 e) 88712

2) Escreva todos os possíveis números formados pelos 3 algarismos abaixo.

6 2 7

Qual o maior número que você escreveu?
Qual o menor número que você escreveu?

3) Observe o número abaixo

51742

a) Que troca você deve fazer para o algarismo 4 aumentar seu valor em 1000 vezes?
b) Que troca você deve fazer para o número 1 diminuir seu valor em 100 vezes?
c) Se fizer as duas trocas acima, que número você obtém?

Você sabia que os símbolos que utilizamos no nosso sistema de numeração são chamados NÚMEROS NATURAIS?

Pesquise sobre a origem dos números naturais. Quais os primeiros povos a utilizarem esses símbolos? Por que os símbolos receberam este nome?

Faça você mesmo.

1) Represente os números abaixo utilizando algarismos:

a) cinco unidades de milhar e três centenas.
b) Doze dezenas de milhar e dez unidades.
c) Uma centena e duas unidades de milhão.
d) Uma unidade de milhão, uma unidade de milhar e uma unidade.

2) Escreva por extenso os números abaixo.

a) 4.005.122 b) 6.003 c) 987.015 d) 135.780. 045 e) 453210

3) Decomponha os números abaixo usando a base 10, como no exemplo.

a) **234= 2x 10^3 + 3x 10^2 + 4**

b) 654 c) 7.890 d) 69.510.213 e) 123.400.275

1.2 Operações com números naturais

Adição

Agora introduziremos uma operação básica no conjunto dos números naturais.

Dado um número natural ***x*****,** o ***sucessor*** de x será representado por $\boldsymbol{x}$ **+1**.

Sejam dados dois números naturais x e y, quaisquer. Podemos obter um outro número que será denotado por $\boldsymbol{x+y}$. Essa operação entre números naturais é chamada de ***adição*** e o número $\boldsymbol{x+y}$ é chamado ***soma*** de x e y.

Por exemplo, dados x = 2 e y = 3, ao somarmos $x + y$ obteremos o número **2+3=5.**

Propriedade Comutativa da Adição:
Em uma adição podemos trocar a ordem das parcelas que o resultado não se altera.
Quaisquer que sejam os números naturais x e y temos que: $\boldsymbol{x+y=y+x}$

Exemplo: se x=4 e y=6 teremos:
4 + 6 = 6 + 4 = 10

Propriedade associativa da adição:
Em uma adição de três ou mais parcelas, podemos associar essas parcelas de maneira diferente que o resultado não se altera: **$(x + y) + z = x + (y + z)$,**

Exemplo: se $x = 10$, $y = 9$ e $z = 12$ teremos:

$(10+9)+12=19+12=31$ que é igual a $10 + (9+ 12)= 10+ 21=31$

Elemento Neutro da adição:
Existe um número natural $\mathbf{x}$ *que, somado a qualquer outro número natural* $\mathbf{y}$ *tem-se* $\mathbf{x+ y= y}$. *Esse número é o* ***zero****. Por isso, o zero é chamado o* ***elemento neutro da adição.***

Exemplo**:** $355+0=355$

Quando um número x aparece numa sequência de números naturais, antes de um número y, ou seja, à esquerda de y, escrevemos $\mathbf{x < y}$ e dizemos que x *é menor do que y*, ou ainda, escrevemos $\mathbf{y > x}$ e dizemos *que y é maior do que x*. Por exemplo:

$1 < 2$, $5 < 7$, $9 > 6$ ...

Adição e Ordem

Há uma relação de compatibilidade entre a ordem e a adição de números naturais, que é a seguinte:

Dados três números naturais x, y e z quaisquer,

se $x < y$ então $x + z < y + z$

De fato, se x está à esquerda de y, então ao deslocarmos x e y simultaneamente de z posições para a direita, não é difícil aceitar que $x + z$ se mantém à esquerda de $y + z$.

A propriedade acima admite uma recíproca, ou seja:

Dados três números naturais x, y e z, quaisquer,

se $x + z < y + z$, então $x < y$

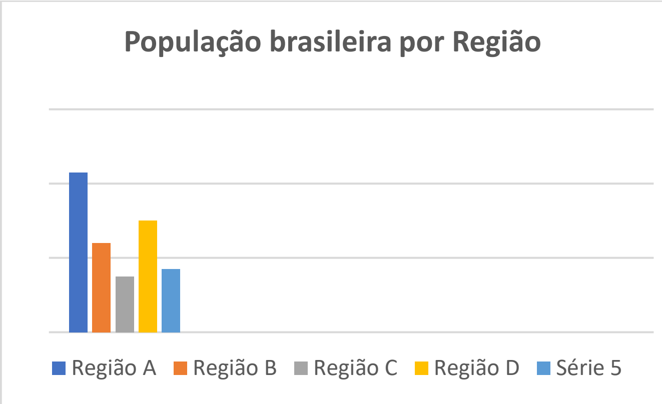
Faça você mesmo.

1)O quadro abaixo mostra o número de habitantes, por região, no Brasil de acordo com a contagem realizada em 2010 pelo IBGE.

	NORTE	NORDESTE	SUL	SUDESTE	CENTRO-OESTE

População	15,8	53.081.950	27,3	80.364.410	14.058.094
Estados	7	9	3	4	3

a) Qual a região brasileira que tinha, em 2010, o maior número de habitantes?
b) Qual a região com menos habitantes, em 2010?
c) Com base nas informações acima, qual região possuía mais habitantes, Norte ou Centro-Oeste?
d) De acordo com os dados da tabela, qual é a Região C do gráfico abaixo? E a Região A?



2) O número da casa de Júlia tem exatamente três algarismos, cuja soma é 24 . Encontre todos os possíveis números da casa de Júlia, em cada uma das situações a seguir:
a) Os três algarismos são iguais.
b) Os algarismos são todos diferentes.
c) Apenas dois algarismos são iguais.

3) Na compra do material escolar de Cecília o valor gasto em cada livro está representado na tabela acima. De acordo com a tabela, quanto Cecília gastou na compra dos livros didáticos? Qual a diferença de preço entre o livro mais caro e o livro mais barato? Se Cecilia tivesse conseguido um desconto de 10 reais em cada livro, quanto ela teria economizado? Quanto ela teria gastado?

LIVRO	VALOR
Português	R$ 120,00
Matemática	R$ 110,00
Física	R$ 130,00
Geografia	R$ 90,00
Biologia	R$ 95,00
Química	R$ 87,00

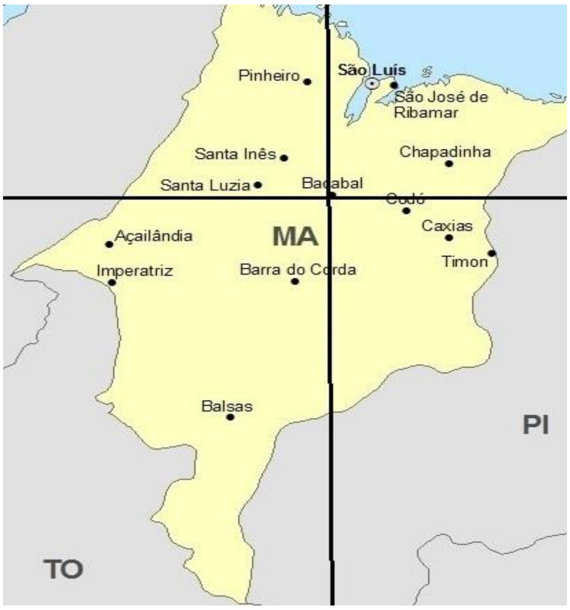
Faça você mesmo.

1) João e Ricardo pretendem viajar pelo Maranhão saindo da capital, São Luís, indo até a cidade de Balsas, no sul do Estado. Eles querem escolher o trajeto mais curto para economizar combustível e tempo. Supondo que as rodovias estão em bom estado de conservação, ajude João e Ricardo a traçar a rota mais rápida e econômica para sua viagem. Veja as opções abaixo, e calcule quantos quilômetros eles percorreriam em cada caso. Eles devem escolher a opção (a), (b) ou (c) para sua viagem?

a) Ir até a cidade de Codó, percorrer a rodovia que liga Codó a Barra do Corda e depois percorrer a rodovia que leva a Balsas.

b) Ir até a cidade de Santa Inês, depois percorrer 375 km até Imperatriz e dirigir mais 390 km até Balsas.

c) Ir de São Luis a Bacabal depois seguir até Barra do Corda, depois dirigir mais 350 km até Balsas.



São Luis	Balsas	815 km
São Luis	Santa Inês	246 km
São Luis	Codó	297 km
São Luis	Barra do Corda	444 km
São Luis	Bacabal	249 km
Santa Inês	Timom	353 km
São Luis	Bacabal	249 km
Barra do Corda	Balsas	354 km
Santa Inês	Imperatriz	375 km
Barra do Corda	Bacabal	251 km
Imperatriz	Balsas	390 km
Santa Inês	Timom	353 km
Timon	Balsas	631 km

2) Resolva as expressões numéricas envolvendo adição e subtração:

a) 17 + 52 -13 b) 119 – 6 + 34 -18 c) 508+1354 - 78+ 45

3) Complete as lacunas em branco de modo que cada expressão fique correta:

a) __ + 45 = 98 b) 179 - __= 123 c) 205 + __ =1500

d) 298 + 354 =___ e) 25+__- 32 +__= 19 f) 70 - __+ 28 +__=12

4) (OBMEP) Considere dois números naturais, cada um deles com três algarismos diferentes. O maior deles só tem algarismos pares e o menor só tem algarismos ímpares. Se a diferença entre eles é a maior possível, qual é essa diferença?

a) 997 b) 777 c) 507 d) 531 e) 729

5) (OBMEP) Quatro cidades A, B, C e D, foram construídas à beira de uma rodovia reta, conforme a ilustração abaixo:

A__________B_________C_________D

A distância entre A e C é de 50 km e a distância entre B e D é de 45km . Além disso, sabe-se que a distância entre a primeira e a última é de 80 km . Qual é a distância entre as cidades B e C?

a) 15km b) 20 km c) 25km d) 5km e) 10km

6) (OBMEP) A prefeitura de uma certa cidade fez uma campanha que permite trocar 4 garrafas de 1litro vazias por uma garrafa de 1 litro cheia de leite. Quantos litros de leite pode obter uma pessoa que possua 43 dessas garrafas vazias fazendo várias trocas?

a) 11 b) 12 c) 13 d) 14 e) 15

7) (OBMEP) Qual é o algarismo a em $a000 + a998 + a999 = 22997$?

1.2 Paridade

Dizemos que um número n é **par** quando o resto da divisão de n por 2 é 0. De maneira análoga, dizemos que um número m é **ímpar** quando o resto da divisão de m por 2 é 1.

Todo número natural é par ou ímpar

A afirmação acima é uma ferramenta de grande utilidade na resolução de muitos problemas envolvendo números naturais. Vejamos três propriedades importantes dos números naturais consequências do fato acima:

- A soma de dois números pares é um número par.
- A soma de dois números ímpares é um número par.
- A soma de um número par com um número ímpar é um número ímpar.

Dizemos que dois números naturais têm mesma ***paridade***, quando são ambos pares ou ambos ímpares.

Faça você mesmo.

1. Escrevemos abaixo os números de 1 a 11.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Antes de cada um deles, coloque sinais " + " ou " - " de forma que a soma todos seja zero.

2. Repita o exercício anterior escrevendo apenas os números de 1 a 10. É possível encontrar uma combinação cuja soma seja zero? Justifique sua resposta.

3. Você pode encontrar 5 números ímpares cuja soma seja 50?

4. Existem dois números pares consecutivos?

5. Existem dois números ímpares consecutivos?

6. Existe um número natural que não é par nem ímpar?

7. Ana está lendo um livro de 90 folhas numeradas de 1 a 180. Sem querer, seu irmão mais novo arrancou 11 folhas do livro. É possível que a soma dos números escritos nas páginas das folhas arrancadas seja 1000?

8. O resultado da soma **1+ 2 + 3+ ...+ 5001**, é um número par ou ímpar?

9. Para quais valores de n a soma dos números de 1 até n é par?

10. Se n é um número natural par, o que se pode dizer sobre a paridade da soma : $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$, (onde cada x_i é um número natural par ou ímpar) ? E, se n for ímpar?

Observe a adição abaixo

6 +6 + 6+ 6+6+ 6+ 6 +6=48

O que essa conta tem de especial? Provavelmente você responderá que todas as parcelas da adição são iguais. É isso mesmo. Quando isso ocorre, em vez de somarmos várias vezes o mesmo número, simplificamos a soma. Veja como.

Quantas vezes o número 6 se repete na adição acima?

O número 6 é somado 8 vezes. Então para simplificar o cálculo em vez de ficarmos somando várias vezes o mesmo termo faremos uma conta só: multiplicaremos.

8 x 6=48

Essa nova operação é chamada ***multiplicação.*** Na multiplicação de um número x por um número y, o número $x \times y$ será chamado o **produto** de x por y e será também denotado por xy, quando não houver risco de confusão.

Propriedade comutativa da multiplicação. Quaisquer que sejam os números naturais x e y, temos que

$$x \times y = y \times x.$$

Propriedade associativa da multiplicação. Quaisquer que sejam os números naturais x, y e z, temos que

$$x \times (y \times z) = (x \times y) \times z.$$

Propriedade distributiva da multiplicação com relação à adição e à subtração. Quaisquer que sejam os números naturais x, y e z, temos

$$x \times (y - z) = (x \times y)-(x \times z)$$

$$x \times (y + z) = (x \times y)+(x \times z).$$

Multiplicação e Ordem.

A relação entre a adição e a ordem se reflete numa relação entre a multiplicação e a ordem:

Se $x < y$ e $z > 0$, então $z \times x < z \times y$.

Faça você mesmo.

1) Escreva o produto de uma multiplicação cujos fatores sejam:

a) 7 e 12 b) 134 e 8 c) 256 e 13 d) 19 e 42 f) 1000 e 100

2) Um conjunto habitacional é formado por 15 prédios residenciais de 12 andares cada. Sabendo que há 4 apartamentos em cada andar, responda;
   a) Quantos apartamentos há nesse conjunto habitacional?
   b) Quanto é arrecadado mensalmente de taxa de condomínio se cada condômino paga R$350,00 por apartamento.

3) Calcule mentalmente o produto de cada calculo a seguir:
   a) 8 x 6 x 2 b) 10 x 7 x 5 c) 2 x 4 x 9 x 7 d) 5 x 8 x 4 e) 12 x 6

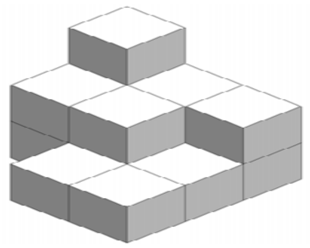
4) Resolvas as expressões numéricas:
   a) 8 x (21+ 13) b) 5 x 7 + 8 – 10 x 2 c) 21 x (231 - 54)

5) Calculo os produtos:
   a) 3548 X 25 b) 16759x 342 c) 987 x 435 d) 1000 x987

6) (OBMEP) Ester vai a uma papelaria para comprar cadernos e canetas. Nesta papelaria os cadernos custam R$ 6,00 cada um. Se ela comprar 3 cadernos, sobram R$ 4,00 . Se o seu irmão lhe emprestar R$ 4,00 , com o total ela conseguirá comprar 2 cadernos e outras 7 canetas iguais.
a) Quanto custa cada caneta?
b) Se ela comprar 2 cadernos e não pedir dinheiro emprestado, quantas das canetas acima Ester poderá comprar?

7) (OBMEP) Um pedreiro é capaz de assentar 8 metros de muro por dia. Quantos metros de muro esse pedreiro consegue assentar em 15 dias?

8) Num armazém foram empilhadas algumas caixas que formaram o monte mostrado na figura. Se cada caixa pesa 25kg quanto pesa o monte com todas as caixas?



9) (OBMEP) Denotemos por P(n) o produto dos algarismos do número *n*. Por exemplo: P(58) = 5 × 8 = 40 e P(319) = 3 × 1 × 9 = 27.
(a) Quais os números naturais menores que 1000 cujo produto de seus algarismos é 12, ou seja: os números naturais $n < 1\,000$ tais que $P(n) = 12$?
(b) Quantos números naturais menores que 199 satisfazem $P(n) = 0$? Ou seja: têm o produto de seus algarismos igual a 0?
(c) Quais números naturais menores que 200 satisfazem a desigualdade $37 < P(n) < 45$?
(d) Dentre os números de 1 a 250, qual o número cujo produto de seus algarismos é o maior?

Divisão de Números Naturais

Uma das propriedades mais importantes dos números naturais é a possibilidade de dividir um número por outro com resto pequeno. Essa é a chamada ***divisão euclidiana***.

Se quisermos dividir 5 laranjas por 2 pessoas não teremos problemas, cada pessoa ficará com uma laranja e meia. A operação matemática que fizemos foi dividir 3 por 2:

$$\mathbf{5 : 2 = \frac{5}{2}}$$

Podemos indicar a divisão com os símbolos /, : e ÷ . Usaremos 5 : 7 para indicar "5 dividido por 7 ".

Mas nem todos os problemas podem ser resolvidos com **divisões fracionárias**.

Se quisermos dividir 27 livros por 4 alunos, não temos a opção de cortar um livro em pedaços. Para essa divisão procedemos da seguinte forma:
Vamos colocar um livro de cada vez na pilha do aluno 1, depois na pilha do aluno 2, depois na pilha do aluno 3 e depois na pilha do aluno 4. Voltamos ao aluno 1 e assim por diante. Quando paramos?

Paramos quando, depois de colocar um livro para o aluno 4, sobram menos de 4 livros. No nosso caso cada aluno ficou com 6 livros e sobraram ainda 3 livros. Essa situação pode ser retratada matematicamente como:

27 : 4 = 6 com resto 3.

Assim, temos:

- um número que queremos dividir (chamado de **dividendo** – no nosso caso 27)
- um número que vai dividir o dividendo (chamado de **divisor** - no nosso caso o 4). Lembre-se: o **divisor** é sempre **diferente de zero;**
- o maior número de vezes que conseguimos colocar o divisor dentro do dividendo (chamado **quociente** ou resultado - no nosso caso, o 6);
- o número de unidades que resta (chamado **resto** e que deve ser menor que o divisor- no nosso caso, o 3).

Usando os símbolos:

- D para dividendo;

- d para divisor (que deve ser diferente de zero)
- q para o quociente;
- r para o resto (que deve ser menor que d)

$$D = d \times q + r$$

com $r < d, \quad d > 0; \quad D, d, q, r \in \mathbb{N}$

Faça você mesmo.

1) Efetue as divisões a seguir. Identifique o dividendo, o divisor e o resto em cada cálculo.
   a) 321:2 b) 543 : 6 c) 12098: 7 d) 23564 : 9 e) 812543: 12
2) Uma caixa com 33 lápis deve ser dividida entre 7 pessoas. Quanto cada um receberá? Quantos lápis sobrarão? Descreve a situação usando a equação de Euclides.

> **Solução:** 33: 7 = 4 com resto 5.
> Cada pessoa receberá 4 lápis. Sobrarão 5 lápis.
> A situação pode ser descrita por: $33 = 7 \times 4 + 5$

3) Efetue as divisões e descreva o resultado na forma da equação de Euclides.

a) 44: 5	i) 210: 100
b) 44: 7	j) 1285: 100
c) 353: 3	k) 1285: 1000
d) 483: 438	l) 11285: 10
e) 1253 : 125	m) 157325: 10000
f) 757 : 75	n) 157325 : 1000
g) 21 : 10	o) 57325 : 100
h) 1210: 10	p) 57325 : 10

4) Efetue as divisões e escreva o resultado na forma da equação de Euclides. O que observa na sequência dos restos?
   a) 48: 4 b) 47:4 c)46:4 d) 45: 4 e) 44:4 f) 43: 4
   g) 42: 4 h) 41:4 i) 40:4
5) Porque o resto tem que ser menor que o divisor?
6) Calcule o valor das expressões numéricas:
   a) (360 : 9) : 4 + 5 x 13 b) 23 + 12 x 7 : 42 x 5
   c)35 + 12 – 9 : 3 -2 d) 530 – 15 x 6+ 60 : 12
   e) (7 x 7 +7) : (8-15: 3 +5) x 2 f) (30 – 5 x 6): (7+2 x 10) x (40-30+5)

7) Coloque parênteses nas expressões abaixo de forma que o resultado final seja 10.
   a) 25- 3x 6 + 12 – 9 b) 11 x 18 : 9 – 6x 2

1.4 Múltiplos e Divisores

Dado $a \in \mathbf{N}$, vamos considerar primeiro os múltiplos de a:

- **0** vezes a (nenhuma vez a), uma vez a, duas vezes a, três vezes a etc., obtendo assim a sequência:

$$\mathbf{0 \times a = 0,\ 1 \times a = a,\ 2 \times a = a + a,\ 3 \times a = a + a + a, \ldots}$$

- Por exemplo, 0 dúzias, uma dúzia, duas dúzias, três dúzias etc., são os múltiplos de 12.
- Outro exemplo é dado pelos múltiplos de 2:

Todo o número é múltiplo de 1 e de si próprio. Note também que, pela definição de múltiplo, um múltiplo não nulo, isto é, diferente de zero, de um número $x > 0$ é sempre maior ou igual do que x. Assim, temos a seguinte propriedade importante:

Se $x \times y = 0$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

1. Os números ímpares são múltiplos de algum número fixado maior do que 1? Você seria capaz de justificar de modo convincente a sua resposta?

2. Liste os 10 primeiros múltiplos de 5.

3. Descubra quantos múltiplos de 7 existem entre 14 e 63, inclusive.

Solução: *O modo mais direto de proceder é listar esses números para depois contá-los:*

14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63.

Assim, concluímos que são 8 números.

4. Descubra quantos múltiplos de 7 existem entre 14 e 7 000, inclusive.
5. Quantos múltiplos de 8 existem entre 32 e 8 000, inclusive?
6. Quantos números pares existem entre 3 211 e 6 321?
7. Quantas dúzias podemos formar com 180 laranjas? E com 220 laranjas?
8. Quantas semanas formam 280 dias? E 360 dias?

Múltiplos Comuns

Um conceito importante é o de **múltiplo comum** de dois números. Por exemplo, considere a sequência dos múltiplos de 3:

0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, . . .

e a sequência dos múltiplos de 5:

0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, . . .

Assim, a sequência dos números que são simultaneamente múltiplos de 3 e de 5 é:

0, 15, 30, 45, . . .

Você saberia continuar a sequência acima? Aparentemente, trata-se da sequência dos múltiplos de 15, ou seja, os múltiplos do menor múltiplo comum não nulo de 3 e de 5, que é 15.

Determine os dois primeiros múltiplos comuns de 4 e 14. Como você continuaria esta sequência?

Se a e b são números naturais não nulos, sabemos por definição que o número $a \times b$ é um múltiplo não nulo de b. Por outro lado, pela propriedade comutativa da multiplicação, tem-se que ele é também um múltiplo de a. Assim, o conjunto dos múltiplos comuns de a e b, além de conter o número 0, contém também o número $a \times b \neq 0$.

O **menor múltiplo comum** não nulo de dois números naturais não nulos a e b é denotado por $\boldsymbol{mmc(a, b)}$ e será chamado de **mínimo múltiplo comum** de a e b (ou abreviadamente *mmc ou* MMC).

Quando um número natural tem exatamente dois divisores, ele é chamado **número primo**. Se um número natural diferente de 0 e de 1 não é primo, dizemos que ele é **composto**.

Números compostos são aqueles que podem ser escritos como produto de dois ou mais números naturais menores. Por exemplo, 15=3 x 5 e 24=6 x 4 são números compostos. Mas, o número 11 só pode ser escrito como produto de 11 por 1, ou seja, 11=1x11. Nesse caso dizemos que 11 é primo.

Dois números consecutivos são sempre **primos entre si**.

(Prove)

Dois números **primos** distintos são sempre primos entre si.

1.6 mdc e mmc

Dados dois ou mais números naturais não nulos, um **divisor comum** desses números é um número natural que divide todos esses números ao mesmo tempo.

Por exemplo: os divisores comuns de 15 e 48 são 1 e 3; os divisores comuns de 16 e 48 são 1, 2, 4, 8 e 16.

Agora, veremos alguns métodos para calcular o **máximo divisor comum** e o **mínimo múltiplo comum** de números naturais, bem como algumas de suas propriedades.

Vamos começar estudando o máximo divisor comum.

O problema de determinar o *mdc* de dois números naturais é bem simples quando os números são pequenos, pois neste caso podemos listar todos os divisores comuns desses números e escolher o maior deles, que será o seu *mdc.*

No entanto, quando um dos dois números for grande, esse método fica impraticável, pois achar os divisores de um número grande é muito complicado. O que fazer então?

Por exemplo, para calcular *mdc*(12, 18), determinamos os divisores de 12, que são: D(12)={ 1, 2, 3, 4, 6, 12 }
e os divisores de 18, que são:
D(18)={ 1, 2, 3, 6, 9, 18}.
Tomando o maior divisor comum, obtemos: *mdc*(12, 18) = 6.

Faça você mesmo.

1) Ache o *mmc* dos seguintes números:

a) 3 e 4 b) 6 e 11 c) 12 e 21 d) 6, 9 e 15. e) 45, 60 e 75.

2) Você percebeu que algumas vezes $mmc(a, b) = a \times b$ e outras vezes não? Por que isso acontece?

3) (Portal da matemática) Ana, Berta e Catarina são médicas que dão plantão em um hospital de 6 em 6 dias, 8 em 8 dias e 10 em 10 dias, respectivamente. Se hoje elas deram plantão juntas, daqui a quantos dias elas darão plantão juntas novamente?

4) O MMC entre A e 78 é 156. Quantos são os possíveis valores de A?

5) Num cesto havia entre 50 e 60 ovos que, contados de 3 em 3, sobravam 2 e contados de 5 em 5 sobravam 4. Qual era o número de ovos?

6) (Portal da matemática) Patrícia possui 48 flores amarelas, 60 flores rosas e 72 flores vermelhas e precisa fazer arranjos de maneira que todos os arranjos tenham a mesma quantidade de flores amarelas, a mesma quantidade de flores vermelhas e a mesma quantidade de flores rosas. Quantas flores cada arranjo possuirá se a quantidade de arranjos deve ser a menor possível e todas as flores sejam utilizadas?

7) Calcule o MDC de 3200, 4000 e 4800.

8) Para realizarmos uma adição de frações, precisamos que todos os denominadores sejam iguais. Para isso, calculamos um múltiplo comum a todos eles, de preferência o menor. Para a adição 1/2+2/3+3/4 +4/5 qual seria o denominador comum a todos, que facilitaria nossos cálculos?

9) Determine os valores de a e b, para que o MDC entre os números 360 e $2^a \times 3^b$ seja 12.

10) Jonas, ao calcular o MDC entre dois números, acabou rasurando parte dos cálculos. Se o MDC entre estes dois números é 10 e ele recuperou parte dos cálculos, conforme a figura, quais eram estes números (representados por x e y)

	1	2	1	12	
x	y			10	0

11) (Portal da matemática) André, Bruno e Carlos estão competindo em uma pista circular de kart. Eles largam juntos e André leva 36 segundos para completar cada volta, Bruno demora 40 segundos em cada volta e Carlos, 48 segundos. Depois de quantas voltas após a largada eles passarão juntos pelo ponto de largada?

12) Seja K o menor número natural tal que K/2 , K/3, K/4 e K/5 sejam números naturais. A soma dos algarismos de K é:

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

1.7 Critérios de divisibilidade.

Dado um número $n = n_r \ldots n_1 n_0$ na sua representação decimal, podemos afirmar que:

> *n é divisível por* 2 (*ou seja, múltiplo de* 2) *se, e somente se, o algarismo* $\mathbf{n_0}$ *é par*

O que podemos dizer sobre a divisibilidade de n por 3, ou seja, quando o número n é divisível por 3?

Enuncie os critérios de divisibilidade por:

3	
4	
5	
6	
9	
10	

Faça você mesmo.

1) Qual a quantidade de divisores de:
2) a) 60 b) 121 c) 120
3) A forma fatorada de um número é $2^3 \cdot 3^2 \cdot 11^2$. Quantos divisores tem este número?

4) Uma professora leva para a sala de aula uma caixa com 24 bombons. Ela quer distribuir estes bombons de maneira que cada aluno receba a mesma quantidade de bombons e também que não sobre nem um bombom com ela. Quantas são as possíveis quantidades de alunos em sala para que isso aconteça?

5) Determine o maior número de 3 algarismos que é divisível por 3 e por 4.

2. NÚMEROS INTEIROS

Dados dois números naturais a e b, até o momento, o número $b - a$ só foi definido quando $b \geq a$. Como remediar esta situação? O jeito que os matemáticos encontraram para que seja sempre definido o número $b - a$ foi o de ampliar o conjunto dos números naturais formando um novo conjunto $\mathbb{Z}$ chamado de *conjunto dos números inteiros*, cujos elementos são dados ordenadamente como segue:

$$\ldots -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

Os números à esquerda do zero são chamados de *números negativos* e os à direita são chamados de *números positivos*. Os pares de números 1 e -1, 2 e -2, 3 e -3 etc., são chamados de *números simétricos*. O elemento 0, que não é nem positivo, nem negativo, é o seu próprio simétrico.

Em $\mathbb{Z}$ temos uma relação de ordem que estende a relação de ordem de $\mathbb{N}$, onde declaramos $a < b$ quando a se encontra à esquerda de b. Os intervalos em $\mathbb{Z}$ são definidos de modo análogo aos intervalos de $\mathbb{N}$.

Representando por $-a$ o simétrico de a, seja ele positivo, negativo ou nulo, temos sempre que $-(-a) = a$.

No conjunto $\mathbb{Z}$, temos definida a **adição** como segue:

- Para todo número inteiro a, definimos $a+b$ como sendo o número obtido pelo deslocamento de a para a direita de b posições, se $b \geq 0$ ou de $-b$ posições para a esquerda se $b < 0$. A adição no conjunto $\mathbb{Z}$ continua tendo as propriedades comutativa e associativa e é compatível com a relação de ordem.
- Definimos a diferença $b - a$ como sendo o número obtido deslocando b para a esquerda a posições, se $a > 0$; e deslocando b para a direita $-a$ posições, se $a < 0$. Isto define uma operação em $\mathbb{Z}$, sem restrições, chamada de ***subtração***. Assim, temos que a subtração é a operação inversa da adição e

$$b - a = b + (-a).$$

Exercício. Mostre com exemplos que a **subtração** não é uma operação nem comutativa nem associativa.

- A **multiplicação** nos inteiros é definida como segue:
  Se $a, b \geq 0$, sabemos o que é $a \times b$. Definimos

$$(-a) \times b = a \times (-b) = -(a \times b),$$
$$\text{e} \quad (-a) \times (-b) = a \times b.$$

Assim, $a \times b$ está definido para quaisquer inteiros a e b. A multiplicação em $\mathbb{Z}$ continua sendo comutativa, associativa e distributiva com relação à adição e à subtração.

Tem-se também que se $a \times b = 0$, com a e b inteiros, então $a = 0$ ou $b = 0$.

A multiplicação também continua compatível com a ordem, no seguinte sentido:

$$\text{se } a < b \text{ e } c > 0, \text{ então } c \times a < c \times b.$$

Exercício.
Mostre com um exemplo que em $\mathbb{Z}$ não vale a propriedade:
Se $a < b$, então $a \times c < b \times c$, qualquer que seja c.
Nem a sua recíproca:
Se $a \times c < b \times c$, então $a < b$, qualquer que seja c.

Múltiplos Inteiros de um Número. Dado um inteiro a, consideremos o conjunto dos múltiplos inteiros de a:

$$a\,\mathbb{Z} = \{a \times d;\ d \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemplo: O conjunto dos múltiplos inteiros de 2 é {..., -4, -2, 0, 2, 4 ,6, 8,...}

O Algoritmo da Divisão Euclidiana nos inteiros:
Dados inteiros a e b, com $a > 0$, existe um único par de inteiros q e r tal que

$$b = aq + r, \text{ com } 0 \leq r < a$$

Faça você mesmo.

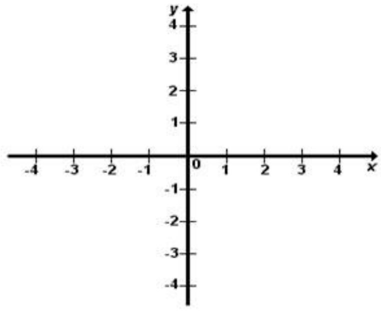
1) Escreva os múltiplos de 3 que pertencem ao intervalo [-10, 10].
2) Escreva, na reta abaixo, os valores de x e z.

3) Efetue as operações com números inteiros:
   a) -5+7-4 b) 20-35-11+6 c) 50 + (-15) -24
4) Efetue a divisão euclidiana nos seguintes casos:
   (a) de −43 por 3 (b) de −43 por 5 (c) de −233 por 4
   (d) de −1 453 por 10, por 100, por 1 000 e por 10 000

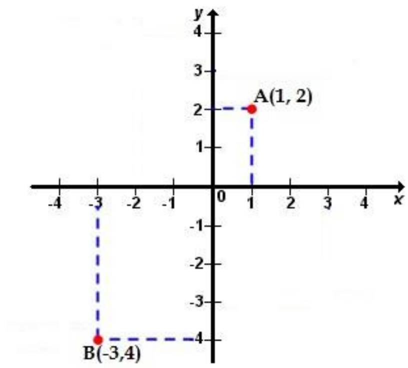
5) Resolva as expressões numéricas abaixo:
   a) (-16-5+4) – 30 – 2 x (-35)
   b) -4 x 23 : 8 x (-12) -100
   c) 25: (-5) + 10 - 7

2.1. O plano cartesiano

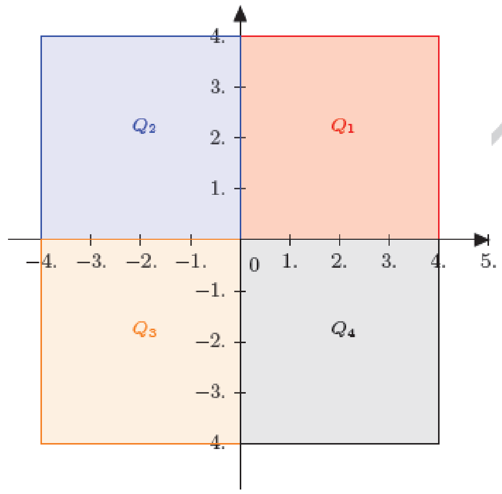
O Plano Cartesiano, criado com o objetivo de localizar pontos num determinado espaço, é formado por dois eixos perpendiculares: um horizontal e outro vertical que se cruzam em um ponto denominado **origem**. O eixo horizontal é chamado de abscissa (x) e o vertical de ordenada (y). Os eixos são enumerados compreendendo o conjunto dos números reais.



No plano cartesiano ao lado estão representados os pontos A e B. Observe que as coordenadas do ponto A são1 e 2, e representamos A(1,2); onde, 1 é a coordenada do ponto A no eixo x e 2 é a coordenada do ponto A no eixo y. Verifique a localização do ponto B e determine suas coordenadas.



O plano pode ser dividido em quatro regiões, conhecidas como seus quadrantes e que podem ser visualizadas na figura a seguir:



O primeiro quadrante é formado por todos os pontos cujas coordenadas são não negativas; o segundo quadrante, por todos os pontos cuja coordenada x é não positiva e cuja coordenada y é não negativa; por sua vez, o terceiro quadrante é formado por todos os pontos cujas coordenadas são ambas não-positivas; o quarto quadrante é composto por todos os pontos cuja coordenada x é não negativa e cuja coordenada y é não positiva. Em termos algébricos:

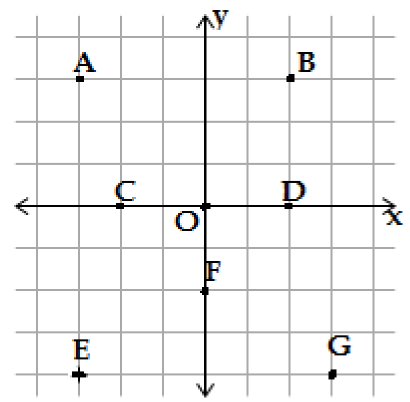
$$\begin{aligned} Q_1 &= \{(x,y)|x,y \geq 0\}, \\ Q_2 &= \{(x,y)|x \leq 0, y \geq 0\}, \\ Q_3 &= \{(x,y)|x,y \leq 0\}, \\ Q_4 &= \{(x,y)|x \geq 0, y \leq 0\}. \end{aligned}$$

Considerando a relação entre as variáveis x e y, dada por $y = -2x + 4$. Responda os itens a seguir:
(a) Se $x = 1$, qual será o valor de y?
(b) Se $y = 4$, qual será o valor de x?
(c) Se $y = 7$, qual será o valor de x?

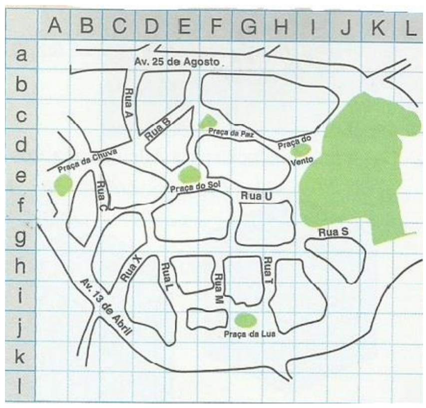
Represente o plano cartesiano e marque os pontos (x, y) obtidos em cada um dos itens do exercício anterior em um plano cartesiano. Em seguida, verifique visualmente que eles são colineares e trace a reta que os une.

Faça você mesmo.

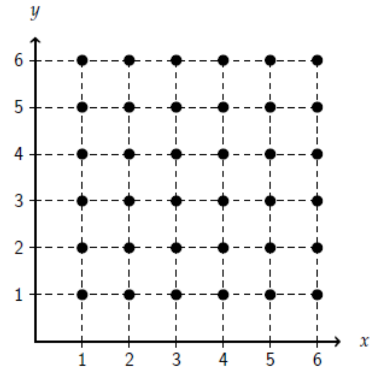
1) No plano cartesiano abaixo o ponto O tem coordenadas (0,0) e o ponto D tem coordenadas (2, 0). Determine as coordenadas dos pontos:
   a) A b) B c) C d) E e) F f) G



2) (Saresp) No guia da cidade podemos encontrar parte de um mapa de ruas e praças como este ao lado. Na posição eE deste mapa está a :
   a) Praça do sol b) Praça da Paz c) Praça da Luz d) Praça da Lua

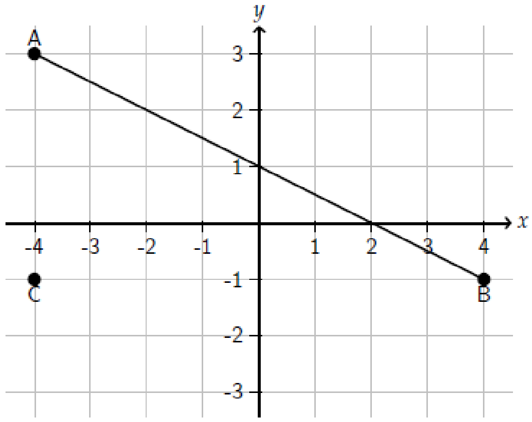


3) Observe o plano cartesiano abaixo e escreva em qual quadrante estão todos os pontos e suas respectivas coordenadas.



4) Marque no plano cartesiano os pontos: A(-1, 1), B(-2,-3), C(0, 2), D(3, 0) e E(3,-2), determinando os seus respectivos quadrantes.

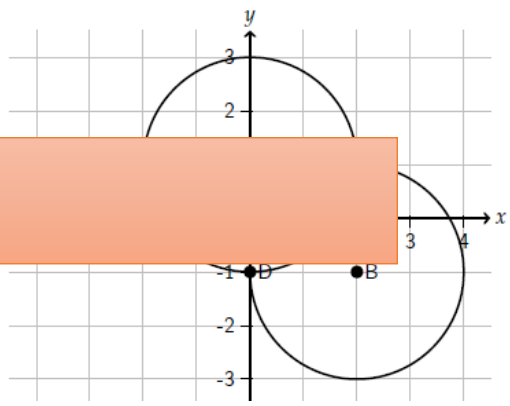
5) Observando o plano cartesiano abaixo, responda:



a) No segmento destacado, quantos são os pontos de coordenadas inteiras? Quais são esses pontos?
b) Quais os pontos do segmento também pertencem aos eixos coordenados?
c) Qual a área do triângulo ABC?

6) Com relação ao círculo abaixo, responda:

a) Quais as coordenadas dos pontos A e B?
b) Quais as coordenadas dos pontos de interseção das circunferências?
c) Uma terceira circunferência tem centro em C e é tangente às duas circunferências exibidas, qual o valor de seu raio?

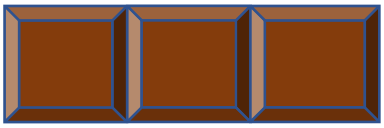


3. FRAÇÕES

Alguns alimentos, para serem consumidos, precisam ser divididos em pedaços, ou partes. Como representamos cada pedaço (supondo que todos tenham o mesmo tamanho)? Como representamos a metade de uma laranja? um pedaço de bolo cortado em 12 fatias iguais? 3 fatias de uma pizza que foi dividida em 8 fatias iguais?

Para responder a essas perguntas precisaremos conhecer as frações. Mas afinal, o que são frações?

Suponha que você ganhou uma barra de chocolate por bom comportamento na escola. Mas, quer dividi-la igualmente com seus dois irmãos. Então cada um deverá ficar com ***um terço*** da barra de chocolate. O símbolo matemático que denota cada parte da barra de chocolate é $\frac{1}{3}$, essa é a **fração** da barra de chocolate que cada irmão receberá.



$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$

Uma fração é o resultado de uma divisão de um número a por um número b≠ 0.

O conjunto das frações é formado por todos os números da forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são números naturais, sendo $b \neq 0$. Cada um desses dois naturais a e b que formam uma fração recebe um nome especial: a é chamado **numerador** e b é chamado **denominador**.

Cada número natural ou inteiro está contido no conjunto das frações.

$$\frac{1}{3} \quad \frac{numerador}{denominador}$$

3.1 Simplificação de frações

Existem várias formas de representar a mesma fração. Por exemplo, ao dividirmos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número estamos simplificando a fração original. Embora seja representada de forma diferente o novo número representa a mesma fração inicial.

Se dividirmos o numerador e denominador da fração resultante, teremos uma nova fração

$$\frac{\mathbf{28}}{\mathbf{42}} = \frac{\mathbf{28:7}}{\mathbf{42:7}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{6}}$$

$$\frac{4}{6} = \frac{4:2}{6:2} = \frac{2}{3}$$

Faça você mesmo.

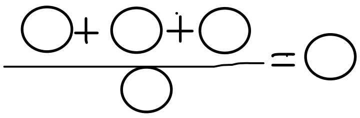
6) Simplifique as frações abaixo:

a) 2/6 b) 15/25 c) 56/100 d) 120/500

2) Escreva como se lê cada fração do exercício 1.

3) Represente através de desenhos cada fração simplificada do exercício 1.

4) Laura desenhou 5 círculos dentro dos quais ela quer colocar números. Ela coloca os círculos a fim de formar uma fração e seu valor inteiro.



· De quantas maneiras Laura colocou os números 2, 3 , 5 , 6 e 11 dentro dos círculos para que a seja verdadeira?

5) Quantas frações menores do que 1 existem, tais que o numerador e denominador são números naturais de um algarismo?

6) A biblioteca de uma escola comprou 140 novos livros, ficando com 2725 de livros. Qual a quantidade de livros que a escola tinha antes da compra?

7) Que número se deve somar aos dois termos de uma fração para se obter o inverso dessa mesma fração?

8) Na sequência $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, x, y, z,... . Quais os valores de x, y, z ?

9) Em uma escola, um quarto dos alunos joga somente vôlei, um terço joga somente futebol, 300 praticam os dois esportes e $\frac{1}{12}$ nenhum deles.

(a) Quantos alunos tem a escola?
(b) Quantos alunos jogam somente futebol?
(c) Quantos alunos jogam futebol?
(d) Quantos alunos praticam um dos 2 esportes?

4.NÚMEROS DECIMAIS

A ilustração acima mostra preços de alimentos em um supermercado. Na ilustração, um quilo de beterraba custa R$ 3,29 e um quilo do chuchu custa R$ 2,99. Os números 3,29 e 2,99 são chamados ***números decimais***.

As frações podem ser representadas através de números decimais. Veja a tabela abaixo e complete-a.

Fração	1 / 2	3/3	3/2	5/2	2/5	1/10	1/100	1/1000
Número decimal	0,5	1	1,5					

Faça você mesmo.

1) Utilize os símbolos =, < e > para comparar os números decimais a seguir:

a)2,20........2,02 b) 0,15.........0,151 c) 12,010.......10,20 d) 0,5........0,50

2) Efetue as operações:

a) 2,54 + 3 b) 0,984 - 0,59 b) 12,56 x 1,3 c) 0,9 x 1,112 d) 0,58 : 0, 2

e) 12 : 1, 2 f) 5,02 : 1,25 g) 4 x 30,001 h) 1,0009-0,798

3) O coco verde na barraca do Tio Zé custa R$ 5,00. Gabriel queria comprar um coco, mas estava achando muito caro, então Tio Zé deu um desconto de R$ 0,50 no preço de um coco. Gabriel pagou por um coco e recebeu de troco R$ 1,50. Quanto Gabriel deu para pagar o coco?

4). Em um condomínio de apartamentos há 4 torres. Em cada torre há 12 andares com 4 apartamentos por andar. A taxa de condomínio por apartamento é R$ 630,80. Supondo que todos os moradores pague sua taxa em dia, qual o valor arrecado por mês em taxas condominiais?

4.1. Porcentagem, Juros, razões e proporções.

Uma empresa de tecnologia lançou um novo tipo de bateria para aparelho celular, que em testes foi capaz de durar 80% mais do que versão anterior do mesmo produto. Porém, um aparelho com essa nova bateria custa 20% mais caro do que a versão anterior. Sabendo que o celular mais antigo à vista custava R$ 750,00, quanto custará um aparelho com a nova bateria? Se for comprado à prazo, em 6 meses, com juros de 2% ao mês, quanto custará o mesmo aparelho?

Como podemos perceber, problemas simples do cotidiano envolvem porcentagem, taxas de juros, razões e proporções.

Então, é cada vez mais necessário e urgente aprendermos a lidar com tais situações. Veremos agora como a Matemática pode nos ajudar a tomar melhores decisões em situações que se tornam cada vez mais presentes na vida de quem vive em sociedades modernas, uma delas são as finanças pessoais.

Você já sabe qual a melhor opção para a compra do celular citado no início desta seção?

4.2 Porcentagem e Juros

As porcentagens podem ser entendidas como frações com denominador igual a 100. Além disso, o símbolo de porcentagem (%), pode ser pensado como representando a fração 1 /100 . Assim, por exemplo:

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{40}{100} = 0{,}4 = 40\%$$

Uma das aplicações cotidianas mais importantes do conceito de porcentagem é a relacionada à compreensão e/ou ao cálculo dos **juros** presentes em alguma transação comercial ou financeira. Mas, **o que são juros? Por que eles existem?** Antes de respondermos estas e outras perguntas de maneira um pouco mais formal, tentaremos entender intuitivamente o conceito de juros através de uma situação cotidiana. Abordaremos problemas em que uma certa quantidade de dinheiro (à qual denominamos **capital**) é investida durante determinado período de tempo. Além disso, assumiremos que este capital será remunerado pelo regime de **juros simples** ou de **juros compostos** durante o período de aplicação, sendo que o regime utilizado ficará claro explicitamente ou a partir do contexto.

Uma loja da cidade está vendendo uma geladeira por R$ 2.555,99 à vista. Se a venda for à prazo, a loja cobrará 10% a mais que o valor original.

Se um automóvel custa hoje R$45.000,00 e a cada ano sofre uma desvalorização de 4%, qual será seu valor, em reais, daqui a dez anos?

Um capital aplicado no prazo de dois anos, a uma taxa de juros compostos de 40% ao ano, resulta no montante de R$ 9800,00. Qual a taxa anual de juros simples que, aplicada ao mesmo capital, durante o mesmo prazo, resultará no mesmo montante ?

Faça você mesmo.

1) O salário dos professores das escolas públicas de Ensino Médio de um certo estado era de R$2600,00 no ano de 2014 e teve um aumento percentual de 6% em janeiro de 2015. Calcule o valor do salário dos professores após o aumento ?

2) Um reservatório com capacidade para 17000*l* de água estava completamente cheio. Devido a um vazamento, ele perdeu 15% do volume inicial, até que o problema do vazamento foi resolvido. Calcule o volume de água que restou no reservatório após a perda com o vazamento.

3) Calcule:

a) 20% de 1500 b) 11% de 40 c) 3% de 1000 d) 0,2% de 100

4) Em certo país, o valor do Imposto de Renda mensal pago pelos trabalhadores formais obedece ás seguintes regras:

(i) Quem recebe salário de até $1500,00 é isento.

(ii) A fatia do salário entre $1500,00 e $3500,00 é tributada em 15%.

(iii) A fatia do salário que excede $3500,00 é tributada em 25%. Calcule o valor de Imposto de Renda de uma pessoa que recebe:

(a) $1.200,00.
(b) $2.900,00.
(c) $5.688,00.

5) Todo mês, Fernando reserva 30% da sua mesada para o lanche na escola. Do restante, ele gasta 60% com a compra de jogos e ainda lhe restam 84 reais. Qual o valor da mesada do Fernando?

6) O preço do litro de gasolina em um determinado país era $3 ,00 em 2015. Em janeiro de 2016 esse preço sofreu dois reajustes sucessivos de 10%. Qual o preço do litro de gasolina após os aumentos? Se o aumento tivesse sido de 20% de uma só vez, quanto custaria o litro de gasolina após esse aumento?

7) Uma empresa de eletrodomésticos possui R$ 80.000,00 em caixa. Ela aplica 30% desse dinheiro em um investimento que rende juros simples a uma taxa de 3% ao mês, durante dois meses; aplica o restante, também durante dois meses, em outro investimento que rende 2% de juros simples ao mês. Ao fim desse período, quanto a empresa possuirá?
8) Ana tomou um empréstimo de R$ 8000,00 a juros compostos de 5% ao mês. Dois meses depois, Ana pagou R$6000,00 e, um mês após esse pagamento, liquidou o empréstimo. Qual foi o valor desse último pagamento?
9) Uma aplicação rende 15% ao mês, em regime de juros compostos. Se uma pessoa aplica a quantia de R$620,00 durante três meses, calcule o montante gerado pela aplicação.
10) O gráfico abaixo mostra o desmatamento da Amazônia, por estado, no ano de 2013. De acordo com o gráfico qual Estado foi o responsável pela maior região desmatada? Quais os Estados onde houve menos desmatamento? Qual a região desmatada no Estado do Maranhão?

Fonte: INPE-PRODES/MCTI

4.3 Razões e Proporções

Quando dizemos que a razão do número de vitórias pelo número de derrotas de um determinado time de futebol é de 2 : 3 (leia 2 para 3), estamos dizendo (por definição) que, se montarmos uma fração cujo numerador é igual ao número de vitórias e o denominador igual ao número de derrotas, então esta fração será equivalente á fração
2 /3 . Como uma possibilidade, suponha que o número de vitórias seja igual a 18 e o de derrotas igual a 27. Então, se construirmos a fração cujo numerador é igual ao número de vitórias e o denominador é igual ao número de derrotas, teremos:

$$\frac{18}{27} = \frac{2 \times \cancel{9}}{3 \times \cancel{9}} = \frac{2}{3}$$

Por outro lado, observe que se um segundo time tiver a mesma razão entre os números de vitórias e derrotas, isso não necessariamente significa que os dois times possuam a mesma

$$\frac{36}{54} = \frac{2 \times 18}{3 \times 18} = \frac{2}{3}$$

quantidade de vitórias. De fato, se este segundo time possui 36 vitórias e 54 derrotas, teremos novamente.

Os exemplos acima chamam atenção para o que talvez seja o fato principal sobre razões: **uma razão é uma medida relativa, e não absoluta**.

Utilizemos esse conceito para resolver nosso primeiro exercício:

O dono de uma revenda de veículos tem um total de 77 automóveis. A razão entre veículos novos e usados é de 4 : 3. Quantos são os carros novos

Primeiro faremos uma tabela com algumas das possibilidades cuja razão entre veículos novos e usados seja 4 : 3.

Novos	Usados	Total
4	3	7
8	6	14
12	9	21
....	.....	....
4x	3x	77

Utilizando o padrão da tabela quando o total de carros for 77 devemos ter $4x + 3x = 77$ de forma que $7x = 77$ ou, o que é o mesmo, $x = 11$. Portanto, teremos $x = 44$ carros novos.

4.3.1 Proporção

Vimos que uma razão é uma medida relativa entre duas grandezas. Por exemplo, se em uma sala de aula há 11 meninos e 12 meninas, a razão entre meninos e meninas será 11 : 12; por outro lado, se em uma outra sala existirem 22 meninos e 24 meninas, a razão entre meninos e meninas nesta segunda sala também será 11 : 12, pois ao simplificarmos a fração 22/ 24 obtemos 11/ 12 .

Definição: Dizemos que duas razões com termos não nulos, *a : b* e *c: d* , formam uma **proporção** quando as frações *a/b* e *c/d* forem **equivalentes** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Representamos essa proporção como *a: b = c: d*

e lemos: " *a* está para *b* assim como *c* está para *d*".

Por exemplo, 2 : 3 e 4 : 6 formam uma proporção pois

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

Dessa forma dizemos que 2 está para 3 assim como 4 está para 6.

Alternativamente diremos que a quádrupla (*a*,*b*,*c*,*d*) é **diretamente proporcional** quando *a:b* = *c:d* .

Um método prático para decidir se duas razões são proporcionais é utilizar a regra da **multiplicação em xis (x).** Essa regra decorre do fato de que a igualdade

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

é equivalente à igualdade

$$\frac{a}{b}\ bd = bd \cdot \frac{c}{d}$$

Faça você mesmo.

1) O dono de uma revenda de veículos tem um total de 77 automóveis. A razão entre veículos novos e usados é de (4 : 3). Quantos são os carros novos?
2) Para fazer um bolo é necessário misturar diversos ingredientes, dentre os quais estão farinha, açúcar e achocolatado em pó. Estes devem ser misturados mantendo uma proporção de (6 : 4 : 3). Maria tem 500 gramas de farinha, 400 gramas de açúcar e 150 gramas de achocolatado em pó, e deseja fazer um bolo utilizando, em gramas, a maior quantidade possível de ingredientes. Que quantidade é essa?
3) Em uma escola, a razão entre meninos e meninas que estão no sexto ano é de (4 : 5), ao passo que a razão correspondente para alunos que estão no sétimo ano é de (5 : 4). Caso a diretora resolva juntar estas duas turmas, qual será a nova razão entre os números de meninos e meninas?
4) Um copo de suco foi feito misturando água e polpa de frutas, na razão volumétrica de (3 : 1). Um segundo copo de suco foi feito usando uma razão volumétrica de (4 : 3), entre água e polpa de frutas. Sabendo que o segundo suco tem metade do volume do primeiro, qual será a razão volumétrica entre água e polpa de frutas se misturarmos os dois copos?
5) A densidade demográfica de um país, de uma cidade ou de qualquer região é calculada através da razão entre a quantidade de pessoas que habitam esta localidade e sua área. Determine a densidade demográfica dos países abaixo. (Seus valores estão aproximados)
   a) França: 60 milhões de habitantes em 500 mil quilômetros quadrados.
   b) Portugal: 10 milhões de habitantes em 100 mil quilômetros quadrados.
   c) Reino Unido: 60 milhões de habitantes em 250 mil quilômetros quadrados.
   d) Bélgica: 12 milhões de habitantes em 30 mil quilômetros quadrados.
   e) Mônaco: 30 mil habitantes em 2 quilômetros quadrados.
   f) Brasil: 200 milhões de habitantes em 8 milhões de quilômetros quadrados.

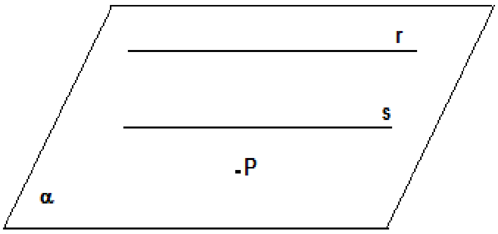
6) O consumo médio C_m é a razão entre a distância *d* percorrida e o consumo de combustível *g* gasto para percorrer essa distância, ou seja, $C_m = d\ g$.
   a) Maria foi de São Luis até Teresina (430 km) no seu carro. Foram gastos nesse percurso 48,5 litros de combustível. Qual foi o consumo médio do carro de Maria?
   b) José foi de São Luis até Santa Inês, no seu carro, em 4 horas com um consumo médio de 56 km/h. Foram gastos nesse percurso 22litros de combustível. Qual foi a velocidade média entre São Luis e Santa Inês?

5.UM POUCO DE GEOMETRIA

Dê uma olhada à sua volta. O que você vê? Não importa onde esteja: na sala de aula, na rua , em casa... em todos os lugares há geometria.

Para entendermos e apreciarmos o mundo que nos cerca precisamos conhecer um pouco de geometria. A geometria é usada para determinar o tamanho, a forma, o volume ou a posição de qualquer tipo de corpo. Os engenheiros e arquitetos usam o desenho geométrico nas plantas de edifícios e no projeto de viadutos, pontes e túneis. Os projetistas de automóveis, os fabricantes de embalagens utilizam a geometria para fazer seus projetos e coloca-los em prática de forma perfeita.

5.1 Ponto, reta e plano

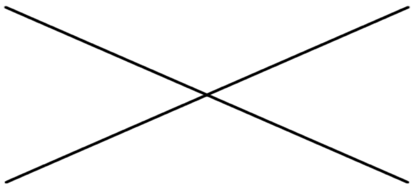


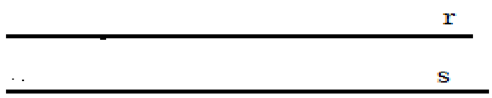
As retas r e s estão contidas no plano α

Os conceitos de **ponto, reta e plano** não são definidos. Compreendemos estes conceitos a partir de um entendimento comum utilizado cotidianamente dentro e fora do ambiente escolar.

É comum representarmos retas, pontos e planos como na figura ao lado. Utilizamos letras maiúsculas para representar os **pontos e** letras minúsculas para representar as **reta**s. Vale ressaltar que retas e planos são infinitos e não podemos representa-los por completo, representamos apenas parte deles. Nós identificamos esses entes geométricos através de suas propriedades.

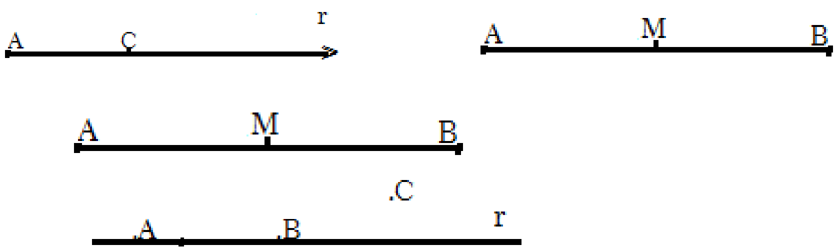
Se são dadas duas retas distintas no plano, ou elas possuem um único ponto em comum, ou elas não possuem ponto algum em comum. No primeiro caso elas são chamadas de **concorrentes** e no segundo caso elas são **paralelas**.





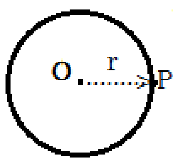
Dados dois pontos A e B há uma única reta passando por estes pontos. Neste caso, escrevemos r = AB. Se são três pontos distintos no plano, nem sempre existe uma reta que passe por esses três pontos. Se existir uma reta que passe por estes três pontos dizemos que eles são **colineares**.

Um ponto A situado sobre uma reta r divide a reta em dois pedaços chamados de **semirretas** de origem A. Dados dois pontos A e B sobre uma reta r, o **segmento** de extremidades A e B é a porção da reta formada pelos pontos compreendidos entre A e B **.**



Entre todos os pontos do segmento AB, um dos que mais se destaca é o **ponto médio**. O ponto médio M do segmento AB é o ponto deste segmento que o divide em dois segmentos de mesmo comprimento, isto é, AM = MB.

Dado um ponto **O** e dado um número real **r > 0**, a circunferência de centro **O** e raio **r** é o conjunto dos pontos do plano que estão a distância r de **O**. Ou seja, um ponto **P** pertence a circunferência quando **OP=r.**

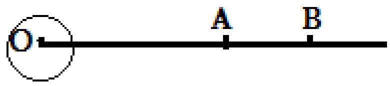


5.2 Ângulos

Um ângulo é a figura formada por duas semirretas de mesma origem. Estas semirretas são chamadas de lados e a origem comum dos lados é o vértice do ângulo. Na figura a seguir vemos um ângulo com lados AO e OB e com vértice no ponto O. Este ângulo será denotado AÔB.

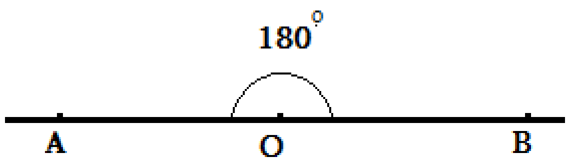
Quando os lados não são coincidentes, um ângulo divide o plano em duas regiões ilimitadas, chamadas de **regiões angulares**.

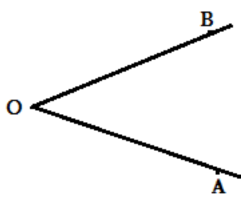
Os ângulos são medidos em **graus**. O ângulo que dá uma volta completa ao redor da sua origem tem 360 graus. Para abreviar a notação, substituímos a palavra "graus" por um pequeno círculo em cima e á direita do número. Assim escrevemos 360° para indicar "**360 graus**".



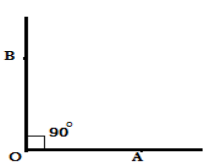
Um ângulo que dá meia volta ao redor da sua origem mede 180 graus ou, abreviadamente, 180°. Este é um ângulo raso e os seus dois lados são duas semirretas opostas, pertencentes a uma mesma reta.

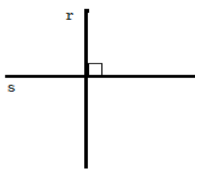
Um ângulo que dá um quarto de volta ao redor da sua origem mede 90°. Este é um ângulo reto e ele é formado pela interseção de duas retas perpendiculares.



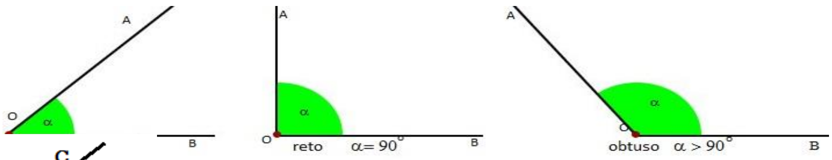


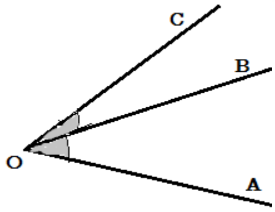
Um ângulo que dá um quarto de volta ao redor da sua origem mede 90°. Este é chamado ângulo reto e ele é formado pela interseção de duas retas perpendiculares.





Já vimos as definições de ângulo raso e ângulo reto. De modo geral os ângulos são classificados do seguinte modo:

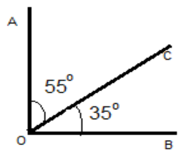


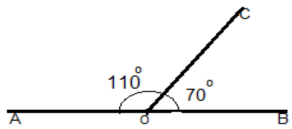


Podemos somar dois ângulos desenhando um deles junto do outro, fazendo os seus vértices coincidirem e um lado de um ângulo coincidir com um lado do outro ângulo. Neste caso formamos dois ângulos adjacentes.

Por exemplo, na figura a seguir vemos a soma do ângulo α = AÔB = 35° com o ângulo β = BÔC = 15° , formando o ângulo $\alpha + \beta$ = AÔC = 50° . Nesta figura, α e β são ângulos **adjacentes.**

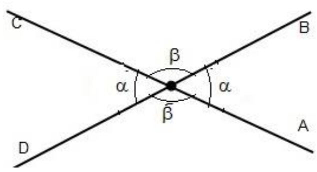
Dois ângulos α e β são **complementares** quando a soma das suas medidas é igual a 90° . Neste caso, dizemos que α é o complemento de β e vice-versa. Por exemplo, os ângulos de medidas 35° e 55° são complementares, pois $35^\circ + 55^\circ = 90^\circ$. Neste caso dizemos que o complemento do ângulo de 35° é o ângulo de 55° . Na soma de dois ângulos complementares sempre obtemos um ângulo reto.





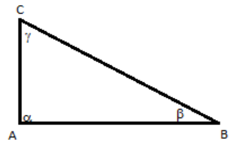
Dois ângulos α e β são **suplementares** quando a soma das suas medidas é igual a 180° . Aqui dizemos que α é o suplemento de β e vice-versa. Por exemplo, os ângulos 70° e 110° são ângulos suplementares, pois $70^\circ + 110^\circ = 180^\circ$. Observe que na soma de dois ângulos suplementares obtemos um ângulo raso.

Dizemos que duas retas **concorrentes** r= AB e s=CD em um ponto O definem dois pares de **ângulos opostos pelo vértice**: AÔB e CÔD são ângulos opostos pelo vértice, assim como AÔD e BÔC também são ângulos opostos pelo vértice. Então, para dois ângulos serem opostos pelo vértice eles devem possuir o mesmo vértice e os seus lados devem se juntar para formar duas retas. Na figura a seguir, α e β são ângulos opostos pelo vértice.



5.3 Triângulos

Os segmentos de reta que unem três pontos não colineares A, B e C formam um **triângulo**. Neste caso, os pontos A, B e C são os vértices e os segmentos AB, BC e CA são os lados do triângulo. Os ângulos α = CÂB , β = A^B C e γ = B^CA são os ângulos internos do triângulo.

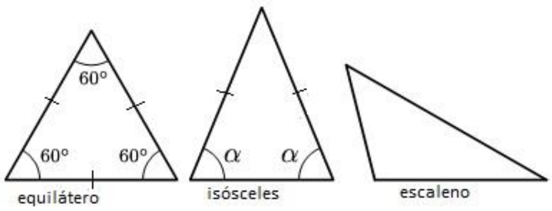


Podemos classificar os triângulos de duas maneiras: em relação aos comprimentos dos seus lados ou em relação às medidas dos seus ângulos internos. No que segue vamos apresentar simultaneamente estas duas classificações.

- Um triângulo é **equilátero** se os seus três lados tiverem o mesmo comprimento. De modo equivalente, um triângulo é equilátero se os seus três ângulos internos tiverem a mesma medida.

- Um triângulo é **isósceles** se ele possuir pelo menos dois lados de mesmo comprimento. De modo equivalente, um triângulo é isósceles quando dois dos seus ângulos internos tiverem a mesma medida.

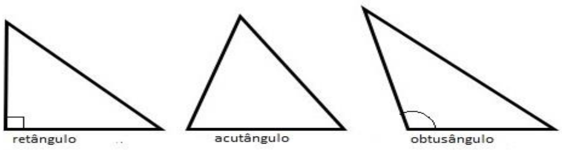
- Um triângulo é **escaleno** quando os seus três lados tiverem comprimentos diferentes. De modo equivalente, um triângulo é escaleno quando todos os seus ângulos internos tiverem medidas diferentes.



- Um triângulo é **acutângulo** quando todos os seus ângulos internos forem agudos.

- Um triaângulo é **retângulo** quando possuir um ângulo reto, ou seja, um ângulo de 90^o.

- Um triângulo é **obtusângulo** quando possuir um ângulo interno obtuso.



PROPRIEDADES DOS TRIÂNGULOS

Veremos agora algumas propriedades dos triângulos

A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o

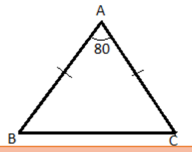
Este resultado será provado mais adiante. Vamos utilizar este resultado na solução de alguns exemplos.

Exemplo 1: Cada um dos ângulos internos de um triângulo equilátero mede 60° .

Solução. Com efeito, seja x a medida de cada um dos ângulos internos de um triângulo equilátero. Como a soma dos ângulos de um triângulo é 180^o , temos que $x + x + x = 180^\circ$ e, portanto, $x = 180^\circ / 3 = 60^\circ$.

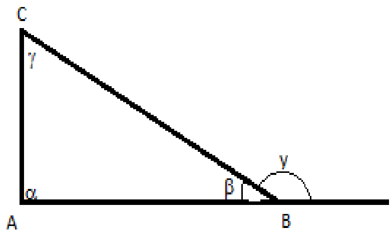
Exemplo 2: Num triângulo isósceles o lado adjacente aos ângulos de medidas iguais chama-se **base**. Na figura a seguir vemos um triângulo isósceles de base BC. Se $C\hat{A}B = 80^\circ$, calcule a medida dos ângulos da base deste triângulo isósceles.

Solução. Sabemos que em um triângulo isósceles os dois ângulos da base possuem a mesma medida. Se α é a medida dos ângulos da base deste triângulo isósceles, então $\alpha + \alpha + 80^\circ = 180^\circ$. Daí, $2\alpha = 100^\circ$ donde $\alpha = 50^\circ$.



A soma dos ângulos externos de triângulo é 360º

o



Em cada vértice do triângulo um **ângulo externo** é o ângulo formado entre um lado e o prolongamento do outro lado do triângulo que encontra esse vértice. No triângulo a baixo y é ângulo externo ao vértice B. Ele é o ângulo formado pelo lado BC.

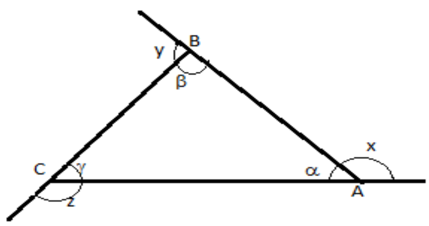
Obserbe que em cada vértice de um triângulo existem dois ângulos externos e estes têm a mesma medida.

Considere agora um triângulo ABC com ângulos internos α, β e γ. Sejam x, y e z os ângulos externos desse triângulo nos vértices A, B e C (veja figura a seguir). A respeito do conceito de ângulo externo é importante observar as seguintes propriedades:

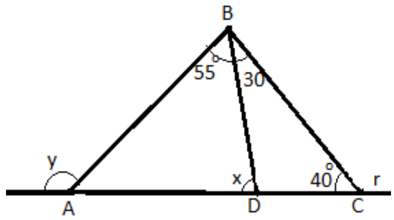
- Um **ângulo externo** é o **suplementar** do seu **ângulo interno adjacente**. Por exemplo, na figura anterior α é ângulo interno e x é o seu ângulo externo adjacente. A soma $\alpha + x$ é um ângulo raso e, portanto, esses ângulos são suplementares.

- Um ângulo externo é igual a soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele. De fato, utilizando a nomenclatura da figura anterior temos que $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ e que $\alpha + x = 180^\circ$. Daí $\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha = x$ e, portanto, o ângulo externo x é igual a soma dos ângulos internos não adjacentes β e γ.

- A soma dos ângulos externos de um triângulo é 360° . De fato, utilizando as propriedades anteriores e a notação da figura anterior temos que $x = 180^\circ - \alpha$, $y = 180^\circ - \beta$ e $z = 180^\circ - \gamma$. Daí a soma dos ângulos externos é
$$x + y + z = (180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma)$$
$$= 540^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) = 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ .$$



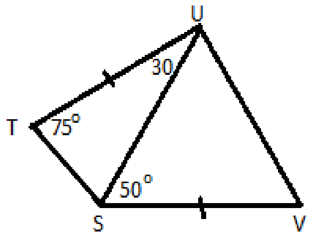
Exemplo 3: Na Figura os pontos A, D e C pertencem à reta r. Determine x e y.



Solução: O ângulo x é ângulo externo do triângulo BCD não adjacente aos ângulos internos de 30º e de 40º .

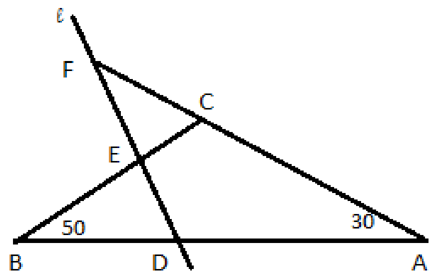
Daí x= 30º + 40º = 70º . Do mesmo modo y é ângulo externo do triângulo ABD não adjacentes aos ângulos internos de 55º e de x=70. Daí y= 55º + x = 55º + 70º = 125º.

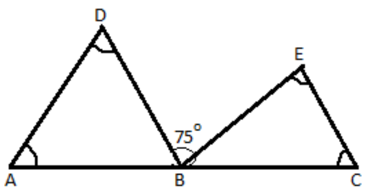
Faça você mesmo.



1. (Banco de Questões 2010) Na figura dada, TU = SV . Quanto vale o ângulo SVU , em graus?

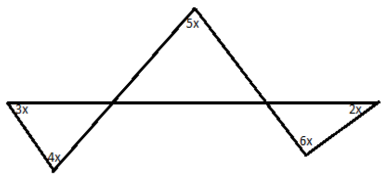
3) (Banco de Questões 2011) Seja ABC um triângulo com ângulos BAC= 30º e ABC = 50º. A reta l corta os lados AB, BC e o prolongamento de AC em D, E e F, respectivamente. Se o triângulo DBE é isósceles, quais são as três possíveis medidas para o ângulo CFE ?



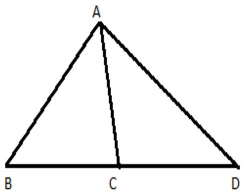


4) (Banco de Questões 2010) Na figura estão indicadas, em graus, as medidas de alguns ângulos em função de x. quanto vale x?

5) Na figura a seguir os pontos A, B e C estão alinhados e DBEˆ = 75◦ . Calcule a soma dos ângulos Aˆ + Dˆ + Eˆ + Cˆ.



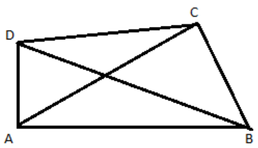
6)Na figura a seguir o triângulo ABC é equilátero eo triânguloACD é isósceles. Determine o menor ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos A^BD e BÂD.

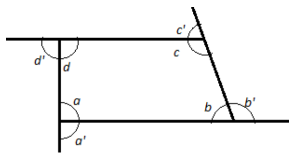


5.4 Quadriláteros

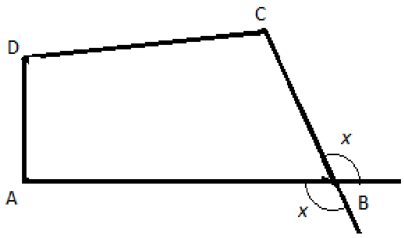
Um quadrilátero é formado por quatro vértices A, B, C e D e por quatro lados que são os segmentos AB, BC, CD e DA tais que estes segmentos se encontram somente nos vértices, e de modo que quaisquer três vértices não sejam pontos colineares.

Os ângulos indicados na figura anterior são os **ângulos internos** do quadrilátero. Na figura a seguir, os segmentos AC e BD são as diagonais e os ângulos suplementares dos ângulos internos são os **ângulos externos** do quadrilátero ABCD. Isto é, se a, b, c e d são os ângulos internos, então $a' = 180^\circ - a$, $b' = 180^\circ - b$, $c' = 180^\circ - c$ e $d' = 180^\circ - d$ são os ângulos externos.





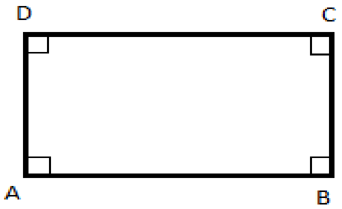
Como no caso dos triângulos, em cada vértice, um ângulo externo de um quadrilátero é o ângulo formado por um lado e pelo prolongamento do outro lado do quadrilátero que chega neste vértice. Em cada vértice de um quadrilátero existem dois ângulos externos opostos pelo vértice. Na figura a seguir indicamos os dois ângulos externos x no vértice B do quadrilátero ABCD.



A respeito da soma dos ângulos internos e da soma dos ângulos externos de um quadrilátero, temos os seguintes resultados:

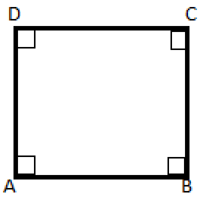
- A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360º
- Como no caso dos triângulos, a soma dos ângulos externos de um quadrilátero também é igual a 360◦

Veremos agora as propriedades de alguns quadriláteros especiais que possuem propriedades bem particulares e são muito importante pra o estuda da Geometria.



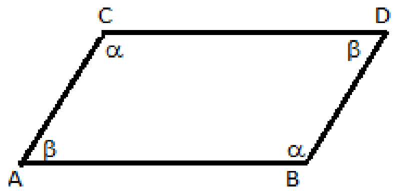
RETÂNGULO

O retângulo é um quadrilátero com todos os ângulos retos. Dois lados opostos de um retângulo são paralelos e possuem o mesmo comprimento. Além disso, as diagonais de um retângulo possuem o mesmo comprimento e se encontram no ponto médio comum.

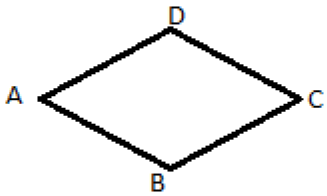


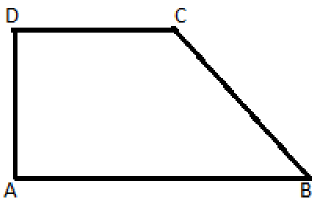
QUADRADO: É um retângulo com os quatro lados de mesmo comprimento.

PARALELOGRAMO: É um quadrilátero com lados opostos paralelos. Em um paralelogramo os lados opostos possuem o mesmo comprimento e dois ângulos opostos quaisquer possuem a mesma medida. Embora as diagonais de um paralelogramo possam ter comprimentos diferentes, elas se encontram no ponto médio comum.



LOSANGO: E um quadrilátero com os quatro lados de mesmo comprimento. Em um losango dois lados opostos são paralelos e possuem o mesmo comprimento. Dois ângulos opostos quaisquer de um losango possuem a mesma medida. As diagonais de um losango são perpendiculares e se encontram no ponto médio comum.



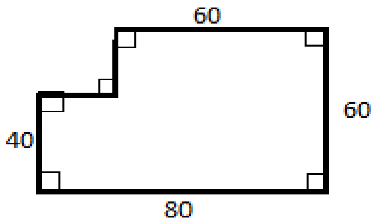


TRAPÉZIO: É um quadrilátero com um par de lados opostos paralelos. Na figura a seguir, vemos um trapézio com os lados AB e CD paralelas.

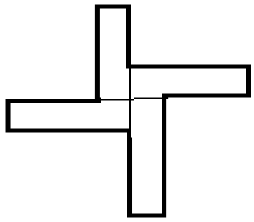
O **perímetro** de um triângulo é a soma dos comprimentos dos seus três lados. O **perímetro de um quadrilátero** é a soma dos comprimentos dos seus quatro lados. E de modo geral se temos uma figura com n lados, o perímetro desta figura é a soma dos comprimentos dos seus n lados, ou seja é o comprimento do contorno da figura.

Faça você mesmo.

1) (OBMEP 2005) Daniela quer cercar o terreno representado pela figura. Nesta figura, dois lados consecutivos são sempre perpendiculares e as medidas de alguns lados estão indicadas em metros. Quantos metros de cerca Daniela terá que comprar?

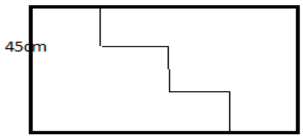


2) (OBMEP 2005) Tia Anastácia uniu quatro retângulos de papel de 3 cm de comprimento por 1 cm de largura, formando a figura a seguir.



a) Qual é o perímetro da figura?
b) Qual é o menor número de retângulos de 3 cm de comprimento por 1 cm de largura que é necessário juntar a esta figura para se obter um quadrado? Faça um desenho ilustrando sua resposta.
c) Qual é o comprimento do lado do quadrado obtido no item anterior?

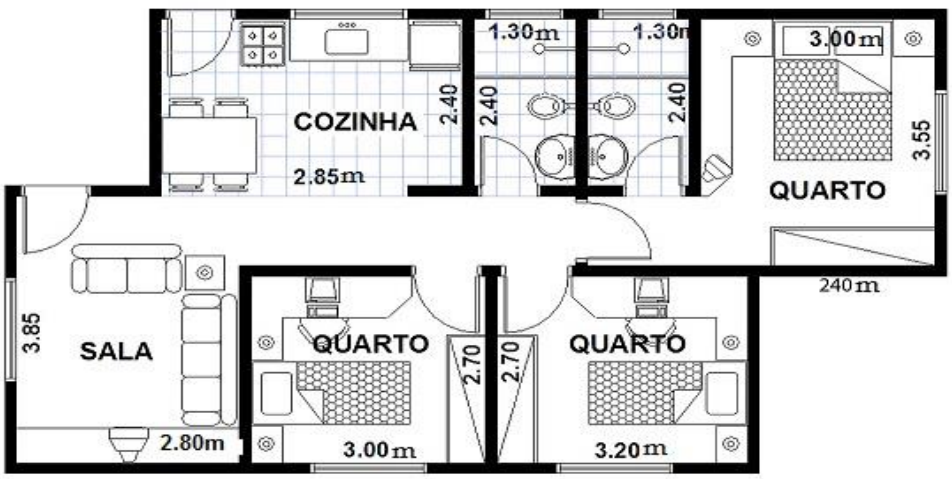
3) (OBMEP 2007) Um retângulo de papelão com 45 cm de altura é recortado em dois pedaços iguais, ao longo da linha pontilhada, como na figura. Com estes dois pedaços é possível montar um quadrado de lado maior que 45 cm. Qual é o comprimento da base do retângulo?



4) (OBMEP 2011) Márcia cortou quatro tiras retangulares de mesma largura, cada uma de um dos lados de uma folha de papel medindo 30 cm por 50 cm. O perímetro do pedaço de papel que sobrou é 85% do perímetro da folha original. Qual é a largura das tiras?

5) (Banco de Questões 2007) Um quadrado de 1 m de lado foi cortado, com cortes paralelos aos seus lados, em quadradinhos de 1 mm de lado. Colocando-se lado a lado os quadradinhos, sem superposição, formou-se um retângulo de 1 mm de largura. Qual o comprimento desse retângulo?

5.5 Área



O desenho acima é a planta baixa de uma casa. Cada cômodo apresenta as dimensões, em metros, pretendidas para a construção. Agora, responda: a) Qual área total dessa construção?

Qual a área da cozinha? Quantos metros quadrados de cerâmica serão necessários para cobrir os 3 quartos da casa?

Para responder as questões acima você precisa saber como calcular a área de figuras geométricas. Então, antes de responder as perguntas acima, diga como calcular a área:

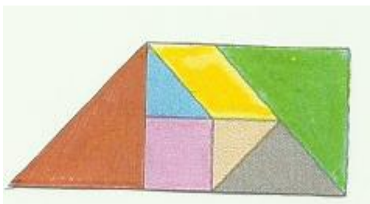
a) do quadrado b) do retângulo c) do triângulo d) do trapézio

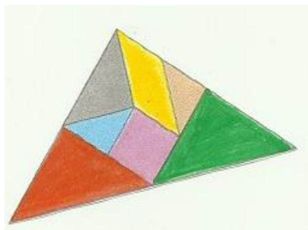
e) do paralelogramo

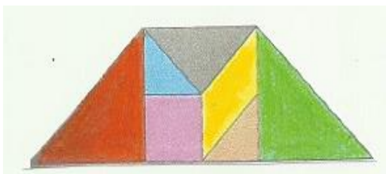
O Tangram é um quebra cabeça muito antigo, de origem chinesa composto por 7 peças cada uma delas em forma geométrica. Uma das configurações mais conhecidas é o quadrado.

a) Quantas figuras geométricas diferentes você consegue identificar no quadrado ao lado. Se o lado do quadrado mede 4 cm, qual a área desse quadrado?

b).Veja outras formas que o tangram pode assumir, nas figuras abaixo. Identifique cada figura geométrica formada e determine sua área.

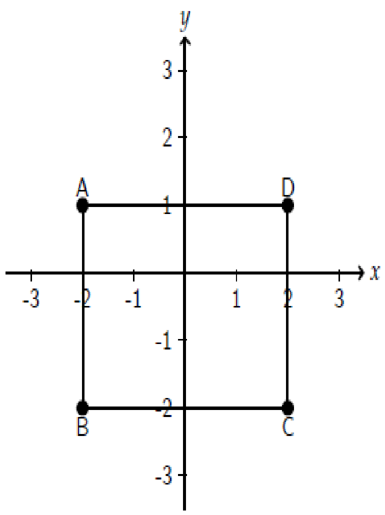






Faça você mesmo.

1)Analisando o gráfico abaixo, responda o que se pede.



a) quais os pares ordenados dos vértices?
b) qual a área do retângulo?
c) qual o perímetro do retângulo?

2) Ainda em relação ao exercício anterior, qual a figura geométrica formada ao ligar os pontos A, B e D? Qual o perímetro dessa figura? Qual a área?

6.EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES

Expressões algébricas são sentenças matemáticas que envolvem letras. São chamadas sentenças abertas, pois as letras (ou variáveis) podem assumir valores distintos.

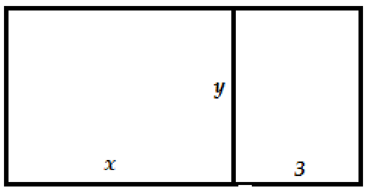
$a + b$ $\qquad$ $2m + 7n + p$

$3x$

1) Utilize símbolos matemáticos e letras para representar as grandezas e reescrever as sentenças abaixo.
a) O perímetro de um quadrado e o quádruplo da medida do seu lado.
b) A área de um quadrado é o quadrado da medida do seu lado.
c) A soma das idades de Luiz e Luísa e dezesseis.
d) A metade da raiz quadrada de um número é menor que o triplo desse número.

2) Seja l a medida da aresta de um cubo. Determine as expressões correspondentes
a) a sua área A. b) ao seu volume V c) a soma S das medidas de todas as arestas.

3). A figura abaixo representa um terreno dividido em duas partes retangulares. Determine: a) a expressão que representa a área do terreno. b) a área do terreno para $x = 20$m e $y = 15$m.



Uma **equação** é uma sentença matemática expressa por uma igualdade. Por exemplo:

$2x=y$ $\qquad$ $3m+ 5= 0$ $\qquad$ $x^2 +6= -9x$

Resolver uma equação é encontrar o valor da incógnita (letra), que representa o número desconhecido.

Faça você mesmo.

1) Determine o conjunto solução das equações abaixo, sabendo que o conjunto universo é $\mathbb{N}$(conjunto dos números naturais).

   a) $x - 7 = 0.$

   b) $\frac{x}{5} = 2.$

   c) $2x + 6 = 12.$

   d) $-x + 8 = 0.$

   e) $3x + 9 = 0.$

   f) $x - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}.$

   g) $3x + 15 = 2x + 18.$

   h) $x - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$

   i) $\frac{x}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{7}{2}.$

2) Se o dobro de um número é 20, qual é esse número?

3) Se um retângulo tem 20cm de comprimento e 100cm^2 de área, qual a medida de sua largura?

4) Quando os gêmeos Anderson e Ricardo nasceram, Maitê tinha 7 anos. Qual a idade dos gêmeos, se hoje a soma das idades dos três irmãos é 34 anos?

5) Diminuindo-se seis anos da idade de minha filha, obtêm-se os $\frac{3}{5}$ de sua idade. Determine a idade de minha filha.

6) Sendo o conjunto universo igual ao conjunto dos números racionais (U = $\mathbb{Q}$), resolva as equações seguintes.

   a) $\frac{x-1}{5} - x = \frac{5-2x}{3}.$

   b) $n - \frac{8-n}{5} = 7 - \frac{8-n}{5}.$

   c) $\frac{1}{2}(\frac{2x}{3} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} - x).$

   d) $3 + \frac{1}{2}(\frac{x}{4} + 8) = \frac{1}{4}(2x - 5).$

7) Determine um número cujo dobro de seu antecessor, menos 3 é igual a 25.

8) Ricardo tem em seu bolso apenas moedas de 25 e 50 centavos, num total de 31 moedas. Sabe-se ainda que o número de moedas de 25 centavos excede em 5 unidades o número de moedas de 50 centavos. Qual a quantia, em reais, que Ricardo tem no bolso?

9) Em um restaurante há 12 mesas, todas ocupadas. Algumas, são ocupadas por 4 pessoas, outras, por apenas 2 pessoas, num total de 28 fregueses. Determine o número de mesas ocupadas por 2 pessoas.

10) Determine o conjunto solução das inequações abaixo, sabendo que o conjunto universo é o conjunto dos números racionais ($U = \mathbb{Q}$).

a) $x + 7 > 10$.

b) $2x + 5 < 11$.

c) $3x - 4 \leq 9$.

d) $8 + 4x \geq 20$.

e) $8 - 3x < 12 - x$.

f) $3 \cdot (x + 2) - 5 \cdot (2x - 1) > 0$.

g) $\frac{x}{5} + \frac{1}{4} < \frac{3}{10} - \frac{5x}{2}$.

h) $3 \cdot (x + \frac{1}{5}) + \frac{x}{3} < 2$.

11) Qual o maior valor inteiro para x na inequação $\frac{2x-1}{5} \leq 2$

12) Quantas soluções inteiras e positivas tem a inequação 2x + 7 _ x + 12?

13) Determine o conjunto solução das inequações abaixo, sabendo que o conjunto universo é o conjunto dos números racionais (U = **Q**).

a) $-x + 7 > 1$.

b) $2x + 5 < 8x - 1$.

c) $3x - \frac{1}{2} \leq 0$.

d) $7 \cdot (2 - x) - 4 \cdot (2x - 3) > 1$.

e) $\frac{x}{2} + \frac{1}{3} < \frac{3}{4} - \frac{x}{5}$.

f) $3 \cdot (3 + \frac{x}{5}) + \frac{x - 4}{3} < 3$.

6.1 Sistemas de Equações

1) Vitor tem 2 filhos. Para que as pessoas descubram as respectivas idades, ele faz duas afirmações:

I) A soma das idades das crianças é 7.

II) A diferença entre o dobro da idade do mais novo com a idade do mais velho é 2.

Quais as idades dos filhos de Vitor?

2) Resolva algebricamente o sistema

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x + y = 1. \end{cases}$$

3) Construa os gráficos das equações do sistema abaixo para determinar se o sistema é possível determinado, possível indeterminado ou impossível.

$$\begin{cases} x + 3y & = & 7 \\ 2x + 6y & = & 15 \end{cases}$$

4) Luiza possui cédulas de 1 real, 2 reais e 5 reais, num total de 17 cédulas e 54 reais. Se a quantidade de cédulas de 5 reais é o dobro da quantidade de cédulas de 1 real, determine quantas cédulas de 2 reais Luiza possui.

5) Ana e Beatriz têm juntas 15 anos, Ana e Carla têm juntas 17 anos, Beatriz e Carla têm juntas 18 anos. Quantos anos as três têm juntas?
6) Discuta o sistema abaixo, segundo os valores de a, ou seja, diga para que valores de a o sistema é possível determinado, possível indeterminado e impossível.

$$\begin{cases} x + y & = & a \\ 2x - 3y & = & 1 \end{cases}$$

7) Se o sistema

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f, \end{cases}$$

Com coeficientes e termos independentes não nulos, não admite solução, que relações podemos estabelecer entre os seus coeficientes?

Faça você mesmo.

Construa o gráfico cartesiano dessas equações e depois determine se houver, o(s) seu(s) ponto(s) de interseção.

1) Resolva algebricamente o sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x - 5y = 7. \end{cases}$$

2) Resolva o sistema anterior geometricamente.

3) Resolva algebricamente o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{x}{3} = 7 \\ \dfrac{x+2y}{3} - \dfrac{y}{6} = 4 \end{cases}$$

4) Pedro e Mariano têm juntos 195 bolinhas de gude. Se Pedro tem 45 bolinhas de gude a mais que Mariano, quantas cada um tem?

5) João retirou de um caixa eletrônico R$330, 00 entre cédulas de R$50, 00 e R$10, 00, num total de 17 cédulas. Qual a quantidade de cada um dos tipos de cédulas?

6) José e Maria, acompanhados de seu filho Pedro, queriam se pesar. Para tanto, utilizaram uma balança defeituosa que só indicava corretamente pesos superiores a 60 kg. Dessa forma, eles se pesaram, dois a dois, e obtiveram os seguintes resultados:
7) José e Pedro: 87 kg;
8) José e Maria: 123 kg; e
9) Maria e Pedro: 66 kg.

10) Diante desses resultados, qual o peso de cada um?

11) Em um determinado colégio, os meninos e meninas usam uniformes diferentes: os meninos usam sapatos e camisa azul e as meninas usam sandálias e blusa vermelha. Em uma determinada sala de aula, a professora percebeu que o número de blusas vermelhas era o dobro do número de camisas azuis e todos os calçados juntos totalizavam 54. Determine quantos eram os meninos e as meninas desta sala.

12) Jonas jogou 20 moedas sobre a mesa, das quais algumas caíram com cara virada para cima e outras, coroa, é claro. Se o número de caras é 25% do número de coroas, quantas são as coroas?

13) Em uma cozinha, existem garfos para peixe, com três dentes, e para carne bovina, com quatro dentes, num total de 32 garfos e 108 dentes. Determine a quantidade de garfos de carne bovina desta cozinha.

14) Joãozinho desenhou em seu caderno 20 figuras geométricas. Como só existiam triângulos e pentágonos e ele desenhou 78 vértices, determine a quantidade de pentágonos desenhados.

15) Usando uma balança de dois pratos, verificamos que 4 abacates pesam o mesmo que 9 bananas e que 3 bananas pesam o mesmo que 2 laranjas. Se colocarmos 9 laranjas num prato da balança, quantos abacates deveremos colocar no outro prato, para equilibrar a balança?
a) 1 b) 2 c) 4 d) 5 e) 6.

7. GRANDEZAS E MEDIDAS

Com o desenvolvimento das relações pessoais e, principalmente, das relações comerciais, o homem sentiu a necessidade de criar meios de medir, ou mensurar, os elementos, sejam eles sólidos, líquidos, gasosos; medir distâncias e até mesmo, ou principalmente, medir o tempo. No início cada povo tinha seus métodos próprios de medir mas, com o desenvolvimento do comercio e a aproximação entre os povos veio a necessidade de uniformizar os sistemas de medidas. Assim, surgiu o Sistema Internacional de Unidades (SI). Esse sistema é adotado em vários países inclusive no Brasil.

No SI **o metro** é a unidade fundamental de medida de comprimento, o **quilograma** é a unidade fundamental de massa, o **litro** é a unidade fundamental de capacidade. Existem outras medidas que também são utilizadas em nosso dia a dia, na indústria, no campo...etc.

Unidades de base do SI		
Grandeza	Unidades de base	
	Nome	Símbolo
comprimento	metro	M
massa	quilograma	kg
tempo	segundo	S
líquidos	litro	L
corrente elétrica	ampere	A
temperatura termodinâmica	kelvin	K
quantidade de matéria	mol	mol
Intensidade luminosa	candela	cd

As tabelas a seguir mostram os múltiplos e submúltiplos de cada uma das unidades acima:

quilômetro	hectômetro	decâmetro	**metro**	decímetro	centímetro	Milímetro
Km	hm	dam	**m**	dm	cm	Mm
1000 m	100 m	10m	**1 m**	0,1 m	0,01 m	0,001m

quilograma	hectograma	decagrama	**grama**	decigrama	centigrama	Miligrama
Kg	hg	dag	**g**	dg	cg	Mg
1000 g	100 g	10 g	**1 g**	0,1 g	0,01 g	0,001 g

quilolitro	hectolitro	decalitro	**litro**	Decilitro	centilitro	mililitro
Kl	hl	dl	**l**	Dl	cl	ml
1000 l	100 l	10 l	**1 l**	0,1 l	0,01 l	0,001 l

Há ainda as unidades de **tempo** como hora, minutos, segundos, dias e assim por diante.

Faça você mesmo.

1) Para a festa junina da escola, Ana precisou fazer um vestido de chita com babados. Para fazer o vestido foram comprados 1, 40 m de tecido, 2,5 m de renda e 1,20 m de fita. Quantos metros de material foi necessário para fazer o vestido de Ana.

2) João fez uma viagem de ida e volta entre Rio Belo e São Paulo em seu carro, que pode rodar com álcool e com gasolina. Na ida, apenas com álcool no tanque, seu carro fez 12km por litro e na volta, apenas com gasolina no tanque, fez 15km por litro. No total, João gastou 18 litros de combustível nessa viagem. Qual é a distância entre Rio Belo e São Paulo?

a) 60km. b) 96km. c) 120km. d) 150km. e) 180km.

3) Ângela tem uma caneca com capacidade para 2, 3 litro de água. Que fração dessa caneca ela deve encher com 1, 2 litro de água?

a) 7/ 12 b) 2/ 3 c) 3 /4 d) 5/ 6

3) Um eleitor que mora no interior percorreu 72 km para não deixar de votar. Os três quartos iniciais do percurso foram feitos de trem e o restante a pé. Quantos quilômetros ele percorreu de trem?

4) Para fazer um bolo é necessário misturar diversos ingredientes, dentre os quais estão farinha, açúcar e achocolatado em pó. Estes devem ser misturados mantendo uma proporção de (6 : 4 : 3). Maria tem 500 gramas de farinha, 400 gramas de açúcar e 150 gramas de achocolatado em pó, e deseja fazer um bolo utilizando, em gramas, a maior quantidade possível de ingredientes. Que quantidade é essa?

Referência Bibliográficas

ASSIS, C. ; BARBOSA, R.; FEITOSA, S.. **Bancos de Questões 2016**; IMPA/OBMEP. Disponível em: www.obmep.org.br.

ASSIS, C. ; BARBOSA, R.; FEITOSA, S.; MIRANDA, T. **Bancos de Questões 2015**; IMPA/OBMEP. Disponível em: www.obmep.org.br.

BRIETZKE, E.. DOERING, C. **Bancos de Questões 2014**; IMPA/OBMEP. Disponível em: www.obmep.org.br.

BRIETZKE, E.. DOERING, C. **Bancos de Questões 2010**; IMPA/OBMEP. Disponível em: www.obmep.org.br.

HEFEZ, A. **Iniciação à Aritmética**; Programa de Iniciação Científica da OBMEP

Portal da Matemática da OBMEP; matemática.obmep.org.br

Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão